Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 6

Abgabe: Freitag 30.05.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Untersuchen folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 5n + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Bei dieser Aufgabe geht es darum, die Divergenz der harmonischen Reihe numerisch zu untersuchen.

i. Schreiben Sie ein Programm, welches zu einer gegebenen Zahl $N \in \mathbb{N}$ den Wert der Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ berechnet. Wenden Sie das Programm auf die natürlichen Zahlen 1 bis 200 an.

ii. Schreiben Sie ein Programm, welches zu einer gegebenen Zahl $x \in \mathbb{R}_{>0}$ das kleinste $N \in \mathbb{N}$ bestimmt für das $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq x$ gilt. Wenden Sie das Programm auf die Zahlen $1 + k \cdot 0.2$ für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 31\}$.

Als Lösung reichen Ausdrucke mit erhaltenen Zahlen.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Die n'te Partialsumme der Reihe ist gegeben durch $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie:

i. Die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und die Folge $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

ii. Beide Folgen aus i. konvergieren und besitzen denselben Grenzwert.

iii. Bestimmen Sie numerisch den Wert der Reihe auf 3 Nachkommastellen genau, indem Sie hinreichend viele Folgendglieder von (s_{2n-1}) und von (s_{2n}) berechnen.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeler Zahlen.

i. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$ absolut konvergiert.

ii. Finden Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe und eine konvergente Folge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n$ divergiert.