Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 8

Abgabe: Freitag 13.06.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

i. (1 Punkt + 2 Bonuspunkte) Zeigen Sie mittels Induktion für alle $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+k}{k}.$$

Überlegen Sie sich vorher über welche Variable die Induktion durchgeführt werden soll.

ii. (3 Punkte) Zeigen Sie für alle $x \in (-1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k,$$

Hinweise: Zeigen Sie die Aussage zuerst für $n = 2$ und führen Sie anschließend eine vollständige Induktion durch. Nutzen Sie die Aussage i.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie die 2-adische Entwicklung für die folgenden Binärbrüche:

$$x = \frac{10}{11} \quad \text{und} \quad x = \frac{110}{111}.$$

Rechnen Sie dafür die Brüche zuerst in die Dezimaldarstellung um und wenden Sie anschließend den Algorithmus aus dem Beweis zur Existenz der g-adischen Entwicklung an bis er terminiert, oder bis Sie ggf. die Periode erkennen.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Rechnen Sie folgende Zahlen aus der jeweiligen Darstellung in die Dezimaldarstellung um:

i. Aus 2-adischer Darstellung : $x = 0,\overline{1011}$ und $x = 0,1000\overline{101}$.

ii. Aus 3-adischer Darstellung : $x = 201$ und $x = 0,\overline{012}$.

Hinweis: stellen Sie periodische Brüche als rationale Brüche dar. Beispiel: $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie:

i. Für alle $a, b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.

ii. Für alle $x > y \geq 0$ gilt: $0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

iii. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig.