Übungsaufgaben zur Klausur (Abgabe: 11.7.2014)

Hinweise.
1. Es handelt sich nicht direkt um eine Probeklausur: Es sind zu viele Aufgaben, und die Aufgaben sind wohl etwas schwerer geraten als die der Klausur.
2. Durch Bearbeiten und Abgabe der Aufgaben kann man auf diesem Aufgabenblatt bis zu 16 Bonuspunkte erreichen.
3. Die Aufgaben werden in der letzten Vorlesung vor der Klausur, also am Dienstag, 15.7., vorgestellt.
4. Die Übungen in der letzten Semesterwoche dienen als Fragestunde. Man darf auch andere Termine besuchen (inbesondere bei einem Donnerstags Tutorium).

Aufgabe 1. *(2+1+2+2 Punkte)*

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Folgern Sie

$$\sum_{k=1}^{n} (2k) = n(n+1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. Folgern Sie mit 1. und 2.

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

4. Zeigen Sie diese Formel alternativ direkt durch vollständige Induktion.

Aufgabe 2. *(1+2+1+2 Punkte)*

1. Definieren Sie, wann eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist.
3. Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge an.
4. Sei $a_n = \exp\big(-(\log n)^2\big) \cdot n$. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \exp\big(-\log n(\log n - 1)\big),$$

und folgern Sie, dass (a_n) für $n \geq 2$ monoton fallend gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3. *(1+2 Punkte)*

1. Schreiben Sie die Binärzahlen 11011 sowie 1111 als Dezimalzahl.
2. Schreiben Sie die Binärzahl

$$0,\overline{1101}$$

als Dezimalbruch. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der geometrischen Reihe.

Aufgabe 4. *(2+2+2+1 Punkte)*
Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Zeigen Sie $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, und $f' = g$, $g' = f$, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$.

2. Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

3. Zeigen Sie

$$f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y), \qquad g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

4. Folgern Sie $1 = \big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2$.

Aufgabe 5. *(1+2+2 Punkte)*
1. Formulieren Sie die Kettenregel für die Ableitung $(g \circ f)'$ der Komposition $g \circ f$ zweier differenzierbarer Funktionen f und g.

2. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \log\big(\log x\big).$$

Zeigen Sie, dass f auf $x \in (1, \infty)$ definiert und streng monoton wachsend sowie auf (e, ∞) positiv ist, dass $f(e^e) = 1$ gilt, und berechnen Sie die Ableitung.

3. Seien $a_1 = 0$, $f_1(x) = \log(x)$ und rekursiv $a_{n+1} = e^{a_n}$ und $f_{n+1}(x) = \log\big(f_n(x)\big)$. Zeigen Sie durch Induktion, dass f_n auf (a_n, ∞) definiert und und streng monoton wachsend sowie auf (a_{n+1}, ∞) positiv ist, und dass $f_n(a_{n+2}) = 1$ sowie

$$\big(f_{n+1}\big)'(x) = \frac{1}{x \prod_{k=1}^n f_k(x)}.$$

Aufgabe 6. *(1+2 Punkte)*
Wir knüpfen an die vorangegangene Aufgabe an.

1. Zeigen Sie mit dem Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_e^n \frac{1}{x \log x}\, dx = \infty.$$

2. Folgern Sie, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

Aufgabe 7. *(2+2+2 Punkte)*
1. Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = \log(1+x)$.

2. Geben Sie die Taylorentwicklung von f in $x = 0$ bis zur dritten Ordnung an.

3. Folgern Sie für $0 \le x < 1$: $\quad \log(1+x) \ge x - x^2/2$,
und daraus: $\quad \log(1+x) \ge x/2$.