Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 10

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 1.7.2014)

Aufgabe 1.

Seien X, Y Semimartingale mit $X_0 = Y_0 = 0$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y])$.

Hinweis: Benutzen Sie Korollar 8.5! Vergegenwärtigen Sie sich, dass das stochastische Exponential $Z_t \coloneqq \mathcal{E}(X)_t$ die Gleichung $Z_t = 1 + (Z_- \cdot X)_t$ löst. Was gilt demnach für $\mathrm{d}Z_t$?

b) Falls X stetig ist, so gilt: $\mathcal{E}(X)^{-1} = \mathcal{E}(-X + [X, X])$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil a)! Was ist $\mathcal{E}(0)$?

Aufgabe 2.

Seien P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße und Q absolutstetig bezüglich P, also $Q \ll P$.

a) Zeigen Sie, dass für eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, dass aus $X_n \to X$ in P-Wahrscheinlichkeit folgt, dass $X_n \to X$ in Q-Wahrscheinlichkeit!

b) Beweisen Sie, dass jedes (totale) P-Semimartingal X ein (totales) Q-Semimartingal ist!

c) Bezeichne mit $H_Q \cdot X$ das stochastische Integral von $H \in \mathbb{L}$ bezüglich X unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q. Zeigen Sie, dass $H_Q \cdot X$ Q-ununterscheidbar von $H_P \cdot X$ ist!

d) Sei (P_k) eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, so dass X ein P_k-Semimartingal ist für jedes k. Sei $R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ mit $\lambda_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Dann ist X ein R-Semimartingal und es gilt $H_R \cdot X = H_{P_k} \cdot X$ P_k-fast sicher für alle k mit $\lambda_k > 0$.

e) Sei X ein P-Semimartingal und ein $\tilde{P}$-Semimartingal für ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$. Dann existiert ein Prozess $H \cdot X$, der ununterscheidbar ist von $H_P \cdot X$ (bezüglich P) und $H_{\tilde{P}} \cdot X$ (bezüglich $\tilde{P}$) .

f) Sei X ein Semimartingal und bezeichne $[X, X]^P \coloneqq X^2 - 2\big((X_-)_P \cdot X\big)$ die quadratische Variation von X betrachtet als P-Semimartingal. Zeigen Sie, dass $[X, X]^Q = [X, X]^P$ Q-fast sicher!

Hinweis: Bearbeiten Sie die Teilaufgaben in der genannten Reihenfolge!

Aufgabe 3.

Sei B eine Standard-Brownsche-Bewegung und sei M das stetige lokale Martingal definiert durch $M_t := \exp(B_t - t/2)$.

a) Berechnen Sie $[M, M]_t$ und zeigen Sie, dass M ein Martingal ist!

   Hinweis: Benutzen Sie zur Berechnung der auftauchenden Integralausdrücke die Dichte von B_t.

b) Berechnen Sie unter Verwendung von a) den Erwartungswert $\mathbb{E}\big(\exp(B_t)\big)$.