Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 11

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 8.7.2014)

Aufgabe 1.

Sei B eine Standard-Brownsche-Bewegung.

a) Beweisen Sie, dass auch der stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X_t \coloneqq \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tB_{1/t} & t > 0 \end{cases}$$

eine Standard-Brownsche-Bewegung ist!

Hinweis: Sie können sich verdeutlichen/verwenden, dass ein stetiger Prozess X genau dann eine Brownsche Bewegung ist, wenn für seine endlich-dimensionalen Verteilungen gilt, dass für alle $n \geq 1$ und Zeitpunkte $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ der Vektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})^T$ multivariat normalverteilt ist mit Erwartungswert $0 \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix Σ mit Einträgen Σ_{jk}, die gleich $\min\{t_j, t_k\}$ sind für $1 \leq j, k \leq n$.

b) Zeigen Sie damit:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

c) Sei $\mathcal{E}(B)$ das stochastische Exponential von B. Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}(B)_t = 0$ fast sicher!

Aufgabe 2.

Sei $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und so, dass $\lim_{t\to\infty}[M, M]_t = \infty$ fast sicher. Für alle $s \geq 0$ definieren wir $T_s \coloneqq \inf\{t > 0 \colon [M, M]_t > s\}$, $\mathcal{G}_s \coloneqq \mathcal{F}_{T_s}$ und $B_s \coloneqq M_{T_s}$.

Zeigen Sie:

a) $s \mapsto T_s$ ist fast sicher rechtsstetig und fast sicher eine inverse Funktion zu $t \mapsto [M, M]_t$, also

$$[M, M]_{T_s-} \leq s \leq [M, M]_{T_s+} \quad \text{für alle } s \geq 0.$$

Insbesondere ist der Prozess T monoton steigend.

b) $\big([M, M]_t\big)_{t\geq 0}$ sind Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$.

c) $(B_s, \mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$ ist eine Standard-Brownsche-Bewegung.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 8.22, dass B quadratintegrierbar ist und anschließend, dass $(B_s)_{s\geq 0}$ und $(B_s^2 - s)_{s\geq 0}$ Martingale bezüglich $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$ sind! Was gilt also nach Satz 8.17? Um die Stetigkeit der Pfade von B zu begründen, können Sie Korollar 8.15 ii) benutzen!

d) $M_t = B_{[M,M]_t}$ fast sicher für $0 \leq t < \infty$.

Aufgabe 3.

Sei M ein stetiges lokales Martingal und sei $[M,M]_\infty = \infty$ fast sicher.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{[M,M]_t} = 0 \quad \text{fast sicher!}$$

Aufgabe 4.

Seien B eine Brownsche-Bewegung und N ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \geq 0$ (auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum). Sei $\tilde{N}_t := N_t - \lambda t$ für $t \geq 0$.

Zeigen Sie, dass $(B_t \tilde{N}_t)_{t\geq 0}$, $\big(\mathcal{E}(B)_t \tilde{N}_t\big)_{t\geq 0}$ und $\big(\mathcal{E}(\tilde{N})_t B_t\big)_{t\geq 0}$ Martingale sind!