Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 12

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 15.7.2014)

Aufgabe 1.

Sei B eine Standard-Brownsche-Bewegung.

a) Sei $c > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass der zeitskalierte Prozess B_{ct} ein *Gauss-Prozess* ist, dass also alle seine endlich-dimensionalen Verteilungen multivariat normalverteilt sind, wobei gilt, dass $B_{ct} = \sqrt{c}B_t$ in Verteilung!

b) Sei nun $\theta(t) = \int_0^t \xi_s^2 \,\mathrm{d}s$ eine deterministische Transformation der Zeit so, dass ξ eine nicht-negative messbare Funktion auf den nicht-negativen reellen Zahlen ist, die nicht von dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum abhängt. Falls $\theta(t) < \infty$ für alle $t \geq 0$, so ist das Integral

$$X_t := \int_0^t \xi_s \,\mathrm{d}B_s$$

wohldefiniert.

(a) Zeigen Sie, dass auch $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Gauss-Prozess ist!

Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass es sich bei ξ_s um eine Treppenfunktion handelt, die die o.g. Voraussetzung erfüllt. Was gilt in dem Fall für die Verteilung von X_t?

(b) Berechnen Sie explizit die Varianz von X_t und zeigen Sie damit, dass X_t die gleiche Verteilung hat wie $B_{\theta(t)}$. Inwiefern verallgemeinert dies das Ergebnis unter a)?

Aufgabe 2.

a) Beweisen Sie den Satz von Girsanov wie in Bemerkung 10.27 a) für einen allgemeinen stochastischen Prozess Y vom Typ (L), bei dem F nicht identisch Null ist!

b) Sei $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität 1 unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P. Für $\lambda > 0$ definieren wir Q durch

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\big((1-\lambda)T + N_T \log(\lambda)\big).$$

Zeigen Sie, dass N unter Q ein Poisson-Prozess mit Intensität λ ist!

Hinweis: Sie können das folgende allgemeine Resultat verwenden: Seien P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra so, dass $Q \ll P$ mit $\mathrm{d}Q = \Lambda \mathrm{d}P$. Falls X Q-

integrierbar ist, so ist ΛX P-integrierbar und Q-fast sicher gilt

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}_P(X\Lambda|\mathcal{G})}{\mathbb{E}_P(\Lambda|\mathcal{G})}.$$

Was können Sie für den Fall $\mathcal{G} = \mathcal{F}_s$ folgern, falls X zusätzlich $\mathcal{F}_t$-messbar ist für $s \leq t$?

Außerdem gilt für die momenterzeugende Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariable Z mit Parameter μ, dass

$$\mathbb{E}(e^{tZ}) = \exp\big(\mu(e^t - 1)\big).$$