Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 2

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 6.5.2014)

Präsenzaufgabe 1.

Betrachten Sie erneut das Riemann–Stieltjes-Integral in der metrischen Ordnung! Existiert für alle stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}f?$$

Werten Sie dazu die entsprechenden Riemann–Stieltjes-Summen $\sigma(Z_n,\cdot)$ für eine beliebige Zerlegung Z_n (mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$) des Intervalls $[a,b]$ einerseits stets am linken Ende des Intervalls aus, also $\tau_i^{L_n} := t_{i-1}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ (um so L_n zu erhalten), andererseits am rechten Ende, also $\tau_i^{R_n} := t_i$ (für R_n). Was erhalten Sie für $R_n - L_n$, was für $R_n + L_n$? Können Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion f angeben, bei dem das Integral existiert bzw. nicht existiert?

Aufgabe 1.

Wir sagen, dass ein stochastischer Prozess $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *lokal die Eigenschaft (A) besitzt*, falls eine monoton steigende Folge von $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ f.s. existiert, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der gestoppte Prozess $X_n = (X_{t\wedge T_n} 1_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ Eigenschaft (A) besitzt.

a) Zeigen Sie, dass jeder càglàd-Prozess lokal beschränkt ist!

b) Konstruieren Sie ein Martingal, welches ein lokales Martingal ist, aber nicht lokal quadratintegrierbar!

   Hinweis: Definieren Sie einen stückweise konstanten stochastischen Prozess unter Verwendung einer einzigen Zufallsvariable ξ. Welche Eigenschaft sollte ξ besitzen?

Aufgabe 2.

Sei $(X_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ ein Submartingal und sei $X^* \coloneqq \sup_{n=0,1,\ldots,N} |X_n|$.

a) Zeigen Sie für eine Funktion ϕ auf den nicht-negativen reellen Zahlen, die monoton steigend und rechtsstetig ist mit $\phi(0) = 0$, dass

$$\mathbb{E}\big(\phi(X^*)\big) \le \mathbb{E}\bigg(|X_N| \int_0^{X^*} \lambda^{-1}\, \mathrm{d}\phi(\lambda)\bigg).$$

b) Beweisen Sie, dass eine positive Konstante C existiert, so dass

$$\mathbb{E}(X^*) \le C\Big(1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|X_n| \log^+(|X_n|)\big)\Big).$$

Hinweis: Wenden Sie die Abschätzung aus a) an mit $\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^+$. Sie können verwenden, dass für alle $a, b > 0$ gilt, dass $a \log(b) \le a \log^+(a) + e^{-1} b$.