Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 3

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 13.5.2014)

Präsenzaufgabe 1.

Geben Sie ein Beispiel für einen adaptierten stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ an, der càdlàg Pfade hat, aber *nicht* lokal beschränkt ist!

Hinweis: Sie können für die Konstruktion zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen benutzen, wobei eine normalverteilt ist und die andere exponentialverteilt.

Aufgabe 1.

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess mit Wertebereich $\mathbb{R}^d$.

a) Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz 4.3 definierte Funktion $t \mapsto f_t(u) = \mathbb{E}\big(\exp(i\langle u, X_t\rangle)\big)$ für alle $u \in \mathbb{R}^d$ stetig ist!

b) Beweisen Sie, dass für alle $t \geq 0$ und alle $0 \leq s \leq t$ gilt

$$f_t(u) = f_s(u) f_{t-s}(u).$$

c) Zeigen Sie unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit des Prozesses, dass

$$\mathbb{E}(X_t) = t\alpha$$

für alle $t \geq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

Hinweis: Aus a) und b) folgt, dass $f_t(u) = \exp\big(t\eta(u)\big)$ für eine Funktion $\eta\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.

Sei $(N_t^n)_{t\geq 0}$ eine Folge ($n \in \mathbb{N}$) von unabhängig identisch verteilten Poisson-Prozessen mit Intensität $\lambda = 1$. Wir definieren $M_t^n := (N_t^n - t)/n$ und $M_t := \sum_{n=1}^{\infty} M_t^n$ für $t \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $M = (M_t)_{t\geq 0}$ im L^2-Sinn wohldefiniert ist!

b) Beweisen Sie, dass für jedes $t > 0$ gilt, dass

$$\sum_{0\leq s\leq t} \Delta M_s = \infty \text{ f.s.},$$

wobei $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$ der Sprung von M zur Zeit $s \geq 0$ ist.