Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 4

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 20.5.2014)

Aufgabe 1.

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Wertebereich $\mathbb{R}^d$, so dass Z_1 die Verteilung P_Z besitzt. Sei zudem N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$, die unabhängig ist von allen Z_n. Die *zusammengesetzte Poisson-Zufallsvariable* X wird definiert als

$$X := Z_1 + \cdots + Z_N.$$

Zeigen Sie, dass für deren charakteristische Funktion ϕ_X gilt, dass für alle $u \in \mathbb{R}^d$

$$\phi_X(u) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda\Big(\exp(i\langle u, y\rangle) - 1\Big)\, \mathrm{d}P_Z(y)\right).$$

Aufgabe 2.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^d$ wird *unendlich teilbar* genannt, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ existieren, so dass

$$X = Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)} \quad \text{in Verteilung.}$$

Dazu ist äquivalent, dass sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_X für alle $n \in \mathbb{N}$ als n-fache Faltung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes bzw. dass sich eine charakteristische Funktion ϕ_X für alle $n \in \mathbb{N}$ als n-te Potenz einer charakteristischen Funktion schreiben lässt.

a) Zeigen Sie, dass die Summe von zwei unabhängigen unendlich teilbaren Zufallsvariablen selbst wieder unendlich teilbar ist!

b) Beweisen Sie, dass das Grenzmaß (bzgl. schwacher Konvergenz) einer Folge von unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen selbst unendlich teilbar ist!

c) Sei Z ein Lévy-Prozess. Zeigen Sie, dass Z_t unendlich teilbar ist für jedes $t \geq 0$.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass man jedes unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaß als Grenzmaß einer schwach konvergenten Folge von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen erhalten kann!