Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 5

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 27.5.2014)

Aufgabe 1.

Zeigen Sie Bemerkung 1.14 a) und vervollständigen Sie damit das Argument im Beweis zu Satz 5.3:

$$|A|_t(\omega) = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{2^n} \big|A_{tk/2^n}(\omega) - A_{t(k-1)/2^n}(\omega)\big| : n \geq 0 \Big\},$$

für jedes $\omega \in \Omega$, so dass $t \mapsto A_t(\omega)$ càdlàg ist.

Aufgabe 2.

Betrachten Sie einen stochastischen Prozess $(H_s)_{s\geq 0}$, der nicht notwendigerweise adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ ist, aber die folgenden Eigenschaften hat:

- Für jedes $s > 0$: $\mathbb{E}\big(|H_s|\big) < \infty$.
- Für jedes s hängt der Prozess

  $$(s, \infty) \ni t \mapsto \mathbb{E}\left(\frac{H_t - H_s}{t - s} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right)$$

  nicht von t ab. (Wir bezeichnen den Wert mit $\alpha(s) = \alpha_s$.)

a) Zeigen Sie, dass $(\alpha_s)_{s\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_s)$-Martingal ist!

b) Nehmen Sie an, dass $(H_s)_{s\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_s)$ adaptiert ist und dass $(\alpha_s)_{s\geq 0}$ messbar ist. Zeigen Sie, dass $(H_s)_{s\geq 0}$ die Form

$$H_s = M_s + \int_0^s \alpha(u)\,\mathrm{d}u$$

besitzt, wobei $(M_s)_{s\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_s)$-Martingal ist!

c) Schreiben Sie die zweite Eigenschaft explizit auf, wenn $H_s = \int_0^s \alpha(u)\,\mathrm{d}u$ ist!

Aufgabe 3.

Sei (M, d) ein separabler metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_M$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to M$ zwei $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}_M$-messbare Abbildungen.

Wir definieren:

$$\rho_P(X, Y) := \inf \left\{ \epsilon \geq 0 \colon P\big(d(X, Y) > \epsilon\big) \leq \epsilon \right\}.$$

a) Wird das Infimum stets angenommen?

b) Was ergibt sich für konstante Funktionen $X = c$, $Y = d$, und was erhält man für $X = 1_A$, $Y = 0$, wenn $A \in \mathcal{A}$ ein Ereignis ist?

c) Zeigen Sie, dass ρ_P auf $L^0(\Omega, M)$ eine Metrik ist, welche Konvergenz in Wahrscheinlichkeit metrisiert, so dass also $\rho_P(X_n, X) \to 0$ genau dann, wenn $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit!

d) Beweisen Sie, dass $L^0(\Omega, M)$ mit der Metrik ρ_P zu einem vollständigen metrischen Raum wird, wenn M selbst vollständig ist!