Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 6

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 3.6.2014)

Aufgabe 1.

Sei B eine Standard-Brownsche-Bewegung und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig ist bis auf eine Stelle $x_0 \neq 0$, an der f einen endlichen Sprung hat und rechtsstetig ist.

Zeigen Sie, dass $X_t = f(B_t)$ kein Semimartingal sein kann! Ist die Einschränkung $x_0 \neq 0$ notwendig?

Aufgabe 2.

Sei $g\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ eine monoton steigende stetige Funktion.

a) Finden Sie eine Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ bezüglich der $M_t := B_{g(t)}$ ein Martingal ist, wobei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche-Bewegung sei, und zeigen Sie die Martingal-Eigenschaft!

b) Zeigen Sie, dass für jede Folge $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[0, t]$ für $t > 0$, die aufsteigend ist im Sinne von $\Pi_j \subset \Pi_k$ für $j \leq k$ und deren Feinheit gegen Null konvergiert, gilt, dass P-fast sicher:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s_i, s_{i+1} \in \Pi_n} (M_{s_{i+1}} - M_{s_i})^2 = g(t).$$

Bemerkung: Im Sinne von Definition 8.1 bedeutet das, dass für jede monoton steigende stetige Funktion g ein Martingal M existiert mit
$$[M, M]_t = g(t).$$

Aufgabe 3.

Sei (X, Y) eine zweidimensionale Standard-Brownsche-Bewegung (so dass X und Y also unabhängige Standard-Brownsche-Bewegungen sind).

Sei $0 < \alpha < 1$. Wir definieren
$$B_t := \alpha X_t + \sqrt{1 - \alpha^2}\, Y_t.$$

Zeigen Sie, dass $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche-Bewegung ist! Berechnen Sie die quadratischen Kovariationen $[X, B]$ und $[Y, B]$ (vgl. Definition 8.1)!