Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 7

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 10.6.2014)

Aufgabe 1.

Sei T eine Stoppzeit und $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche-Bewegung. Der Prozess $\bar{B} = (\bar{B}_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\bar{B}_t \coloneqq B_t 1_{t\leq T} + \big(2B_T - B_t\big)1_{t>T}$$

wird die *an T reflektierte Brownsche Bewegung* genannt.

a) Fertigen Sie eine Skizze von $\bar{B}$ an!

b) Zeigen Sie, dass $\bar{B}$ ebenfalls eine Standard-Brownsche-Bewegung ist!

Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.4 aus der Vorlesung!

c) Beweisen Sie, dass für beliebiges $a > 0$ und alle $t \geq 0$ gilt:

$$P\Big(\sup_{0\leq s\leq t} B_s > a\Big) = 2P(B_t > a) = P(|B_t| > a).$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil b)!

Aufgabe 2.

Wir betrachten die Nullstellenmenge $Z = Z(\omega)$ der Brownschen Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ als Ergänzung zu Aufgabe 1 von Aufgabenblatt 6:

$$Z = \{t \geq 0\colon B_t = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß $\mu(Z)$ von Z fast sicher gleich 0 ist!

Hinweis: Was ist der Erwartungswert von $\mu(Z) = \int_0^\infty 1_{\{0\}}(B_t)\,\mathrm{d}t$?

b) Zeigen Sie, dass B_t fast sicher unendlich viele Nullstellen in jedem Zeitintervall $(0, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ hat!

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil c) von Aufgabe 1 und den Zwischenwertsatz der Differential- und Integralrechnung!

Bemerkung: Man sieht leicht, dass die Menge Z abgeschlossen ist und kann darüber hinaus sogar zeigen, dass sie keine isolierten Punkte besitzt.

Aufgabe 3.

Seien X, Y zwei Semimartingale und $H, K \in \mathbb{L}$.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$[H \cdot X,\ K \cdot Y]_t = \int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}[X, Y]_s.$$

Aufgabe 4.

Finden Sie ein Beispiel für Semimartingale X^n $(n \geq 1)$ und X, so dass $\lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t$ fast sicher für alle t, aber $\lim_{n\to\infty} [X^n, X]_t \neq [X, X]_t$ fast sicher für mindestens ein t.

Hinweis: Betrachten Sie $X_t = 1_{[t_0,\infty)}(t)$, wobei $t_0 > 0$.