Fachbereich Mathematik und Informatik **Sommersemester 2014**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 9

zur Vorlesung Stochastische Analysis

(Besprechung der Aufgaben am 24.6.2014)

Aufgabe 1.

Sei N ein Poisson-Prozess.

a) Was ergibt sich für $[N,N]^c$?

b) Berechnen Sie $\int_0^t N_{s-}\,\mathrm{d}N_s$ mithilfe der Itō-Formel!

Hinweis: $N_s^2 = (N_{s-} + \Delta N_s)^2$

c) Vergleichen Sie das Ergebnis in b) damit, was sich nach Definition der quadratischen Variation $[N,N]_t$ ergibt!

Aufgabe 2.

Sei B eine Standard-Brownsche-Bewegung und sei $H \in \mathbb{L}$. Wir definieren $M_t := \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$.

a) Zeigen Sie, dass M genau dann eine Brownsche-Bewegung ist, falls das Lebesgue-Maß der Menge $\{t\colon |H_t| \neq 1\}$ fast sicher gleich Null ist!

b) Beweisen Sie, dass die an einer Stoppzeit T reflektierte Brownsche-Bewegung $\bar{B}$ (vgl. dazu Aufgabe 1 von Aufgabenblatt 7) ebenfalls eine Brownsche-Bewegung ist!

Hinweis: Stellen Sie B_t, $B_{T\wedge t}$ und damit $\bar{B}_t = 2B_{T\wedge t} - B_t$ als stochastisches Integral dar! Zeigen Sie dann, dass $[\bar{B},\bar{B}]_t = \int_0^t \left(2\,\mathbb{1}_{[0,T]}(s) - 1\right)^2 \mathrm{d}s$.

Aufgabe 3.

Sei M ein stetiges lokales Martingal und sei A ein stetiger, adaptierter stochastischer Prozess mit Pfaden von endlicher Variation auf kompakten Zeitmengen mit $A_0 = 0$. Wir definieren $X := M + A$.

Zeigen Sie, dass $[X,X] = [M,M]$ fast sicher!

Aufgabe 4.

Sei X ein stetiges Semimartingal und $f \in C^2$.

Zeigen Sie, dass

$$\big[f(X), f(X)\big]_t = \int_0^t f'(X_s)^2 \,\mathrm{d}[X, X]_s.$$