

Aufgabenblatt 10

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 25.06.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 22 (8 Punkte). Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine absolut summierbare Folge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < \infty \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} .$$

a) Zeigen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j-k} = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (1 - |h/n|) a_h .$$

b) Folgern Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j-k} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h$$

mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz.

Aufgabe 23 (8 Punkte). Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad , \quad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx .$$

Zeigen Sie:

a) $f'(t) + g'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und folgern Sie $f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}$.

b) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Hinweis: Berechnen Sie die Integrale mit stetigem Integranden als Riemann-Integral.

Aufgabe 24 (4 Bonuspunkte). Für $f \in \mathcal{L}_1([0, 1], \lambda^1)$ sei die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_k(x) = \sqrt[k]{x} f(x) \quad , \quad k \in \mathbb{N} .$$

Zeigen Sie, dass alle f_k λ^1 -integrierbar sind und dass der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k d\lambda^1$$

existiert. Geben Sie den Grenzwert an.