Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 11

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 02.07.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 25 (10 Punkte).

a) Zeigen Sie für $x > 0$, dass

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}\ .$$

b) Folgern Sie mit dem *Satz von Fubini* (Voraussetzungen nachprüfen!), dass für beliebiges $T > 0$ gilt

$$\int_0^T \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^\infty \int_0^T \sin(x)\, e^{-tx}\, dx\, dt\ .$$

c) Bestimmen Sie für $T > 0$

$$\int_0^T \sin(x) e^{-tx}\, dx\ .$$

d) Folgern Sie jetzt durch den Grenzübergang $T \to \infty$, dass

$$R - \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

Hinweis: Berechnen Sie die Integrale stetiger Funktionen als Riemann-Integral.

Aufgabe 26 (6 Punkte). Seien

$$K_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leqslant r\} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ r > 0$$

und bezeichne λ^n das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Berechnen Sie für beliebigen Radius r die Kugelvolumina

$$\lambda^2(K_r^2) \quad \text{und} \quad \lambda^3(K_r^3)\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \pi/2$. Berechnen Sie auch hier Integrale stetiger Funktionen als Riemann-Integral.