

Aufgabenblatt 12

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 09.07.2014 vor der Vorlesung)

Dieses Aufgabenblatt dient als zusätzliche Vorbereitung auf die Klausur. Es können maximal 16 der 21 Bonuspunkte angerechnet werden. Die Lösungen werden in der letzten Vorlesung am 16.07.2014 vorgestellt. Die letzten Tutorien am 14. bzw. 15.07.2014 sollen als Fragestunde genutzt werden.

Aufgabe 27 (3 Bonuspunkte). Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über einer nichtleeren Menge Ω und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$. Betrachten Sie die Eigenschaften:

$$1. \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R} \text{ paarweise disjunkt gilt } \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k),$$

und

$$\forall (B_n) \subset \mathcal{R}, B_n \subset B_{n+1} \text{ mit } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R} \text{ gilt } \mu(B_n) \rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

$$2. \forall (A_n) \subset \mathcal{R}, A_n \text{ paarweise disjunkt mit } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \text{ gilt } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Zeigen Sie: **1.** und **2.** sind äquivalent.

Aufgabe 28 (3 Bonuspunkte). Sei Ω eine nichtleere Menge.

1. Definieren Sie den Begriff eines Dynkin Systems über Ω .

2. Sei nun $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $\mu, \nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ zwei endliche Maße mit $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Zeige Sie:

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ist ein Dynkin System.

Aufgabe 29 (3 Bonuspunkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beschreiben Sie die Konstruktion des Integrals

1. für nicht-negative Treppenfunktionen $\varphi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$,

2. für nicht-negative messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$,

3. für allgemeines messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, falls diese quasi-integrierbar ist.

Aufgabe 30 (3 Bonuspunkte). Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, wobei ν das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ ist. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Wann ist f integrierbar (bzgl. ν) und wie berechnet sich das Integral? (ohne Beweis.)

2. Zeigen Sie:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos m^2}{(n+m)^2 - m^2} = 0.$$

Aufgabe 31 (3 Bonuspunkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = ne^{-nx} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Zeigen Sie:

1. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert λ^1 -fast sicher gegen eine λ^1 -integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Es existiert keine λ^1 -integrierbare Majorante für die f_n . Verwenden Sie hierfür den Satz von der majorisierten Konvergenz.

Aufgabe 32 (3 Bonuspunkte). Sei $f : (0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}(x, y).$$

Berechnen Sie

$$\int f \, d\lambda^2.$$

Aufgabe 33 (3 Bonuspunkte). Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^n e^{-x} \left(1 - \frac{3 \sin(nx)}{n}\right) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x), \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $n \geq 1$ ist $|f_n(x)| \leq 4e^{-x/2}$, $x \geq 0$.

Hinweis: Nutzen Sie $\log(1+x) \leq x$

2. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(x) \rightarrow e^{-x/2} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$, $n \rightarrow \infty$.
3. Folgern Sie schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x/2} \, dx, \quad n \rightarrow \infty.$$