Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 1

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 23.04.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (8 Punkte). Es sei Ω eine beliebige Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem und $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{E})$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring. Definieren Sie iterativ $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ und

$$\mathcal{E}_n := \big\{A\backslash B, A \cup B : A, B \in \mathcal{E}_{n-1}\big\}, \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$$

(Sie haben also $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{E}$ konstruiert.)

Aufgabe 2 (4+4 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ liegt dicht in X, falls es für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt, so dass $x \in B_\varepsilon(a)$ gilt, wobei wir mit $B_\varepsilon(a)$ die offene Kugel mit Radius ε um a bezeichnen. Weiter nennen wir den metrischen Raum separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge von X gibt.

Es seien nun $c_0 := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}$ der Vektorraum aller reellen Nullfolgen und $\ell^\infty := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}\}$ der Vektorraum aller beschränkten reellen Folgen. Weiter seien beide Vektorräume mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik

$$d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(n) - g(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

verknüpft, so dass (c_0, d_∞) und (ℓ^∞, d_∞) metrische Räume sind.
Beweisen oder widerlegen Sie, dass

a) (c_0, d_∞)

b) (ℓ^∞, d_∞)

separabel ist.

Hinweis: Definieren Sie sich für jedes $M \subset \mathbb{N}$ die Folge $\Psi_M \in \ell^\infty$, für die $\Psi_M(n) = 1$, falls $n \in M$ und sonst $\Psi_M(n) = 0$ gilt. Überlegen Sie sich, ob es eine abzählbare Teilmenge von ℓ^∞ gibt, mit der man jedes Ψ_M beliebig gut approximieren kann.