

Aufgabenblatt 2

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 30.04.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 3 (2+3+1+2 Punkte). Es seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen und $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Ist $\mathcal{H}$ ein Halbring über Ω_2 , so ist $f^{-1}(\mathcal{H})$ ein Halbring über Ω_1 .
- b) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring über Ω_1 , so ist
 - (i) $f(\mathcal{R})$ ein Ring über Ω_2 .
 - (ii) $\{B \subset \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{R}\}$ ein Ring über Ω_2 .
- c) Ist $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ eine Familie von Halbringen über Ω_1 mit beliebiger Indexmenge I , so ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$ ein Halbring über Ω_1 .
- d) Ist $\mathcal{H}$ ein Halbring über Ω_1 mit der Eigenschaft, dass für $A, B \in \mathcal{H}$ auch $A \cup B \in \mathcal{H}$ gilt, so ist $\mathcal{H}$ ein Ring über Ω_1 .

Aufgabe 4 (3+2+3 Punkte). Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring über einer nichtleeren Menge Ω und $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge von Inhalten auf $\mathcal{R}$, d.h. für alle $A \in \mathcal{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A).$$

Für $A \in \mathcal{R}$ definiere

$$\mu(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A).$$

Zeigen Sie:

- a) Die Abbildung $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}$.
- b) Sind die μ_n Prämaße auf $\mathcal{R}$, so ist auch μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass für jede reelle Doppelfolge $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$

$$\sup_{n,m} a_{nm} = \sup_n \sup_m a_{nm}$$

gilt.

- c) Ist μ endlich, so gilt auch die Umkehrung von b).