Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 3

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 07.05.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 5 (6+2 Punkte).

a) Für jede Menge $\Omega \neq \emptyset$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &\to \{0,1\}^\Omega := \big\{f : \Omega \to \{0,1\}\big\} \\ A &\mapsto 1_A \end{aligned}$$

bijektiv, wobei 1_A die Indikatorfunktion von A auf Ω darstelle:

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in A \\ 0, & \text{für } x \in A^c \end{cases}$$

Jede Teilmenge A von Ω lässt sich also eineindeutig durch ihre Indikatorfunktion 1_A auf Ω beschreiben.
Darüber hinaus gilt, dass sich Operationen auf Mengen in $\mathcal{P}(\Omega)$ als Funktionen in den mit den Mengen korrespondierenden Indikatorfunktionen erklären lassen. Beispielsweise ergibt sich für die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ (mit $A_i \subset \Omega$ für alle $i \in I$ und I beliebig) die Darstellung

$$1_{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}(x) = \max_{i \in I} \big\{1_{A_i}(x)\big\}, \quad x \in \Omega.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie analog die aus den folgenden Mengenoperationen resultierenden Mengen schreiben können (dazu sei I eine beliebige Indexmenge und alle genannten Mengen A, A_i, B mit $i \in I \cup \mathbb{N}$ seinen Teilmengen von Ω):

(i) Durchschnitt: $\bigcap_{i \in I} A_i$;
(ii) Differenz: $A \backslash B$;
(iii) Komplement: A^c;
(iv) Symmetrische Differenz: $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Die untere Folgen-Grenze beziehungsweise die obere Folgen-Grenze der Mengen A_i sind definiert als

$$\liminf_{i \to \infty} A_i := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant i} A_k \quad \text{und} \quad \limsup_{i \to \infty} A_i := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant i} A_k.$$

Zeigen Sie nun, dass für alle $x \in \Omega$ folgenden Identitäten gelten:

(v) $1_{\liminf\limits_{i \to \infty} A_i}(x) = \liminf\limits_{i \to \infty} 1_{A_i}(x)$;
(vi) $1_{\limsup\limits_{i \to \infty} A_i}(x) = \limsup\limits_{i \to \infty} 1_{A_i}(x)$.

b) Argumentieren Sie am Beispiel

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \triangle B_i),$$

dass sich in der unter a) genannten Schreibweise auf den ersten Blick komplexe mengentheoretische Beziehungen leicht zeigen lassen, indem Sie die entsprechende punktweise Ungleichung aufschreiben und deren Richtigkeit begründen.

Aufgabe 6 (4+4 Punkte).
Nehmen Sie an, dass sich das Lebesguesche Prämaß $\lambda : \mathcal{R}(\mathcal{J}) \to [0, \infty)$ beziehungsweise $\lambda^2 : \mathcal{R}(\mathcal{J}^2) \to [0, \infty)$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ fortsetzen lässt. Zeigen Sie, dass die Mengen

a) $\{x\}$, $[x, y]$, $\mathbb{Q}$ und $[0, 1]\backslash\mathbb{Q}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $x \leqslant y$

b) $[0, 1]^2\backslash\big(\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]\big)$ und $\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leqslant 1\}$

Borelmengen sind (d.h., dass sie in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ liegen) und berechnen Sie die entsprechenden Lebesgue-Maße.