Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 4

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 14.05.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte). Welche der folgenden Abbildungen $\eta_i : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind äußere Maße?

a) $\eta_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

b) $\eta_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

c) $\eta_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset,\ A \text{ beschränkt} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle η_i-messbaren Mengen.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Es sei $\Omega = [0,2)$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, [0,1), [1,2), [0,2)\}$ eine σ-Algebra über Ω. Weiter sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\mu([0,1)) = \mu([1,2)) = \frac{1}{2}$ und $\mu(\Omega) = 1$. Dann definiert

$$\eta(B) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

das zugehörige äußere Maß. Geben Sie η explizit an und bestimmen Sie die σ-Algebra aller η-messbaren Mengen.

Aufgabe 9 (6 Punkte). Es sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to (0,1) \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[q_n,\infty)}(x) \end{aligned}$$

eine Verteilungsfunktion definiert wird, das heißt, es gelten

- F ist monoton wachsend;
- F ist rechtsseitig stetig;
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.