Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 5

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 21.05.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 10 (6 Punkte).
Seien Ω nichtleer, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem und

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} E_k : n \in \mathbb{N}, E_k \in \mathcal{E}, k = 1, \ldots, n \right\} .$$

Zeigen Sie, dass dann äquivalent sind:

(i) $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

(ii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Aufgabe 11 (1+4+4+1 Punkte). Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring über einer nichtleeren Menge Ω und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{H})$ die von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra. Weiter sei $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Dann wird das zu μ gehörige äußere Maß für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gemäß Satz 1.35 definiert durch

$$\eta(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \ A_n \in \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Ähnlich wie in der Vorlesung kann man zeigen, dass $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_\eta$ und $\eta|_{\mathcal{H}} = \mu$ gelten. (Dies kann ohne Beweis verwendet werden.) Des Weiteren heißt μ σ-endlich, falls es eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\mu(B_n) < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega$ gibt. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass Fortsetzungen σ-endlicher Prämaße zu Maßen auf $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt sind.
Sei dazu $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\nu(A) \leq \eta(A)$.

b) Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\eta(A) < \infty$ gilt $\eta(A) = \nu(A)$.
Hinweis: Zeigen und benutzen Sie:
   - Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{H}$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \eta(A) + \varepsilon$.
   - Es folgen $\eta(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A) < \varepsilon$ und $\eta(A) \leq \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \nu(A) + \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A)$ $\leq \nu(A) + \varepsilon$.

c) Für alle $A \in \mathcal{A}$ zu der es eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ und $\eta(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, gilt $\eta(A) = \nu(A)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass Sie ohne Einschränkung annehmen können, dass $B_n \in \mathcal{A}$ gilt und die B_n paarweise disjunkt sind.

Folgern Sie schließlich:

d) Ist μ σ-endlich, so ist ν eindeutig bestimmt.