Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 6

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 28.05.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 12 (2+6 Punkte). Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\} & , x \geqslant 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ist die Abbildung

$$\mu_F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}\ ,\ \mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \text{ für } a \leq b$$

ein Prämaß?

b) Bestimmen Sie das zu μ_F gehörige äußere Maß η_{μ_F} sowie die σ-Algebra der η_{μ_F}-messbaren Mengen $\mathcal{A}_{\eta_{\mu_F}}$.

Aufgabe 13 (2+4+2 Punkte). Sei $F = \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen mit Werten in $\{0,2\}$ und $F_n = \{0,2\}^n$ die Menge aller n-Tupel über derselben Grundmenge. Für eine Folge (bzw. ein n-Tupel) ω bezeichne im Folgenden ω_i die i-te Komponente von ω, wobei $i \in \mathbb{N}$ (bzw. $i = 1, 2, \ldots, n$) gelte.
Unser Ziel ist es, eine Menge C zu konstruieren und einige ihrer Eigenschaften zu studieren. Dazu setzen wir zunächst $I_{(0)} := [0, 1/3]$ und $I_{(2)} := [2/3, 1]$. Falls für ein $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Menge I_ω ein Intervall ist, also $I_\omega = [a, b]$ für $0 \leq a < b \leq 1$, dann setzen wir:

$$I_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,0)} := [a, a + (b-a)/3] = [a, 2a/3 + b/3] \text{ und}$$
$$I_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2)} := [a/3 + 2b/3, b].$$

(Wir haben also im Fall $I_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,0)}$ das abgeschlossene linke Drittel von I_ω und für $I_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,2)}$ das abgeschlossene rechte Drittel von I_ω gewählt.)
Wir definieren weiter für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $C_n := \bigcup_{\omega \in F_n} I_\omega$ und schließlich $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

a) Zeigen Sie, dass $\lambda^1(C) = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n 3^{-n} \text{ mit } x_n \in \{0,2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

gilt. C ist also die Menge aller Zahlen aus $[0,1]$, die eine triadische Darstellung besitzen, in der keine 1 vorkommt.
Hinweis: Definieren Sie für $\omega \in F$ die Projektion $\pi_{(1,\ldots,n)}(\omega) := (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in F_n$. Zeigen Sie zunächst, dass

$$C = \bigcup_{\omega \in F} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{\pi_{(1,\ldots,n)}(\omega)}$$

und dass für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in F_n$

$$I_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} = \left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i 3^{-i} \ , \ \sum_{i=1}^{n} \omega_i 3^{-i} + 3^{-n} \right]$$

gilt.

c) Folgern Sie aus b), dass C überabzählbar viele Elemente enthält.