

Aufgabenblatt 7

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 04.06.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 14 (6 Bonuspunkte).

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A})$ und $(\Omega_2, \mathcal{B})$ messbare Räume. Zwei Elemente $x, y \in \Omega_1$ heißen äquivalent, falls $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(y)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation auf Ω_1 definiert. Weiter sei $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine messbare Abbildung und es gelte $\{y\} \in \mathcal{B}$ für alle $y \in \Omega_2$. Zeigen Sie, dass f auf jeder Äquivalenzklasse der obigen Relation konstant ist.

Aufgabe 15 (5+5 Bonuspunkte). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) Zeigen Sie, dass die Menge S_f der Stetigkeitsstellen von f eine Borel-Menge ist.
- b) Es seien $X = Y = \mathbb{R}$ und d_X beziehungsweise d_Y die vom Absolutbetrag induzierte Metrik. Weiter habe S_f^c Lebesgue-Maß 0. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-messbar ist, das heißt, f ist $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.