Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
Heiko Werner

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 8

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 11.06.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 16 (4 Punkte). Es sei Ω eine nichtleere Menge und $A \subset \Omega$ eine Teilmenge. Bestimmen Sie alle $\sigma(\{A\})$-messbaren Abbildungen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 17 (4 Punkte). Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gelten:

- $|f|$ ist Lebesgue-messbar.
- f ist nicht Lebesgue-messbar.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 18.

Aufgabe 18 (8 Punkte).
Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\lambda^1(A) > 0$. Zeigen Sie, dass es eine nicht-Lebesgue-messbare Teilmenge $A_1 \subset A$ gibt.
Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

- Zeigen Sie die Aussage für eine beschränkte Teilmenge $B \subset A$ mit $\lambda^1(B) > 0$. Warum existiert eine solche Menge?
- Betrachten Sie ein Repräsentantensystem R der Äquivalenzrelation auf B, die durch $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}$ definiert ist.
- Sei $\gamma > 0$, so dass $B \subset [-\gamma, \gamma]$ gilt. Definieren Sie $R^* := \bigcup_{q \in [-2\gamma, 2\gamma] \cap \mathbb{Q}} (R + q)$. Nehmen Sie an, dass $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ gilt und führen Sie dies zum Widerspruch.