

Aufgabenblatt 9

zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

(Abgabe der Lösungen: Mittwoch, den 18.06.2014 vor der Vorlesung)

Aufgabe 19 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{M}^+$ gilt

$$\int \sum_{n \geq 1} f_n \, d\mu = \sum_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu .$$

Aufgabe 20 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{A} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ A &\mapsto \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

ein Maß auf Ω ist.

Aufgabe 21 (8 Punkte). Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, wobei ν das Zählmaß sei, welches die Anzahl der Elemente einer Menge liefert. Zeigen Sie:

a) Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) .$$

b) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) .$$