4. Übungsblatt „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Seien X und Y beliebige nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Weiter seien I eine beliebige Indexmenge und $B_i \subset Y$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie:

- (a) (i) $f^{-1}(Y) = X$
(ii) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$
(iii) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$
(iv) $f^{-1}(B_{i_1} \setminus B_{i_2}) = f^{-1}(B_{i_1}) \setminus f^{-1}(B_{i_2})$ für bel. $i_1, i_2 \in I$
- (b) Sind die B_i disjunkt, so auch die $f^{-1}(B_i)$.

2. Hausaufgabe:

5 Punkte

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge zu den Parametern $p_n \in (0, 1)$ geometrisch verteilter Zufallsvariablen. Ferner sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Sei a eine positive reelle Zahl. Unter welchen Voraussetzungen an die Parameter p_n und λ gilt die folgende Konvergenz?

$$P\left(\frac{X_n}{n} > a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X > a)$$

Hinweis: Eine Zufallsvariable Y heißt geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$, falls gilt $P(Y = k) = (1 - p)^k p$, $k \in \mathbb{N}_0$

3. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Sie werfen einen (fairen) Würfel zweimal.

- (i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment an.
- (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $B =$ 'Die Augensumme ist 8'?
- (iii) Die Zufallsvariable Z gebe die Augenzahl im ersten Wurf an. Geben Sie die Verteilung von Z an.
- (iv) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Z unter der Bedingung $B =$ 'Die Augensumme ist 8'.

4. Hausaufgabe: ***5 Punkte**

Angenommen ein Theater habe 80 Sitzplätze, die mit den Nummern 1 bis 80 versehen seien. Bei einer ausverkauften Vorstellung betreten die Besucher das Theater entsprechend ihrer Platzkarten (in aufsteigender Reihenfolge). Weiter sei angenommen, dass der erste Theatergast (Ticket Nr. 1) ein wenig verwirrt ist und sich gleichverteilt auf einen der Sitze setzt. Die anderen Besucher verhalten sich wie folgt: Ist der eigene Platz noch frei, so setzen sie sich auf diesen. Ist dies nicht der Fall, so wählen sie gleichverteilt einen Sitzplatz unter den noch freien aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Besucher mit der Platznummer 80 auf seinem eigenen Platz sitzt, wenn sich alle gesetzt haben?

Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse (zum Zeitpunkt, wenn der k -te Besucher in das Theater kommt, $k=2, \dots, 80$)

- $E_k =$ 'Der k -te Platz ist belegt'
- $A_k =$ 'Einer der ersten $(k-1)$ Besucher belegt Sitz 1'
- $B_k =$ 'Einer der ersten $(k-1)$ Besucher belegt Sitz 80'

5. Hausaufgabe: L**5 Punkte**

Gegeben sei eine Folge von Urnen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei die n te Urne M_n schwarze Kugeln und N_n Kugeln insgesamt enthält. Hierbei soll für $n \rightarrow \infty$ gelten, dass $N_n \rightarrow \infty$ und $M_n/N_n \rightarrow p \in (0, 1)$. Die Zufallsvariable X_n modelliere die Anzahl der (ohne Zurücklegen) gezogenen Kugeln, wenn man k Kugeln aus der n ten Urne zieht. Man zeige, dass die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine zu den Parametern (k, p) binomialverteilten Zufallsvariablen X konvergiert, d.h. dass für alle natürlichen Zahlen $a \leq k$ gilt:

$$P(X_n = a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X = a).$$

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.