Philipps-Universität Marburg **WS 2010/2011**
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich Ausgabe: Fr 19.11.2010
Assistent: Reik Schottstedt Abgabe: Fr 26.11.2010 vor der Vorlesung
http://www.uni-marburg.de/fb12/stoch/teaching/elementare_stochastik_ws_10/

5. Übungsblatt
„Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: * 5 Punkte

(a) Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Die Zufallsvariable X sei negativ binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass

$$E(X) = n \cdot \frac{1-p}{p}$$

gilt.

Hinweis: Eine Zufallsvariable X heißt negativ binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{-n}{k} p^n (p-1)^k \\ &= \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

2. Hausaufgabe: 5 Punkte

(a) Zeigen Sie: Für unabhängige Zufallsvariablen $X_j : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E_j, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, 2$, $(E_j, \mathcal{E}_j)$ messbarer Raum, und messbare Funktionen $\varphi_j : (E_j, \mathcal{E}_j) \to (V_j, \mathcal{V}_j)$ mit $(V_j, \mathcal{V}_j)$ messbarer Raum, sind $\varphi_1(X_1)$ und $\varphi_2(X_2)$ unabhängig.

(b) Gegeben seien nun unabhängige diskrete Zufallsvariablen $Z_j : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E_j, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, \ldots, n$ und natürliche Zahlen $1 < k < l < n$. Wir definieren die Produkträume $H_1 := \prod_{j=1}^k E_j$, $H_2 := \prod_{j=k+1}^l E_j$ und $H_3 := \prod_{j=l+1}^n E_j$ mit zugehörigen σ-Algebras $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ und $\mathcal{H}_3$. Ferner sind folgende messbare Funktionen gegeben $\varphi_j : (H_j, \mathcal{H}_j) \to (V_j, \mathcal{V}_j)$, $j = 1, 2, 3$, mit $(V_j, \mathcal{V}_j)$ messbarer Raum. Zeigen Sie , dass $\varphi_1(Z_1, \ldots, Z_k)$, $\varphi_2(Z_{k+1}, \ldots, Z_l)$ und $\varphi_3(Z_{l+1}, \ldots, Z_n)$ unabhängig sind.

3. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Die Zahl $\vartheta \in \mathbb{R}$ heißt *Median* der Zufallsvariable X, wenn gilt:

$$(i)\, P(X \geq \vartheta) \geq \frac{1}{2} \text{ und } (ii)\, P(X \leq \vartheta) \geq \frac{1}{2}$$

Zeigen Sie:

(a) Der Median ϑ existiert immer.

(b) Der Median ϑ ist nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt.

(c) Angenommen, X sei eine reellwertige Zufallsvariable mit stetiger Riemann-Dichte f. Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung an, damit der Median von X eindeutig bestimmt ist.

4. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsgewichten

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^k$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in (0, 1]$.

(i) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq n)$.

(ii) Zeigen Sie für $k, j \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit

$$P(X \geq k + j \mid X \geq j) = P(X \geq k)\ , \tag{1}$$

die sog. *Gedächtnislosigkeit* der geometrischen Verteilung. Veranschaulichen Sie (1) an einem Beispiel.

(iii) Zeigen Sie, dass jede diskrete Zufallsvariable, welche (1) erfüllt, bereits geometrisch verteilt ist.

5. Hausaufgabe: L **5 Punkte**

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ zwei *disjunkte Ereignisse*. Zeigen Sie: A und B sind genau dann unabhängig, wenn eines der beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

(b) Mit $n \geq 2$ und $\Omega = \{0, 1\}^n$ sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Ereignisse

$$A_j = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega \mid \omega_j = 1\} \quad , \quad j = 1, ..., n\ ,$$

und

$$B = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega \mid \omega_1 + ... + \omega_n = 1 \mod 2\}\ .$$

Welche der drei Familien (i) $\{A_1, ..., A_n\}$, (ii) $\{A_1, ..., A_n, B\}$ und (iii) $\{A_2, ..., A_n, B\}$ sind unabhängig?

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.