Philipps-Universität Marburg **WS 2010/2011**
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich
Assistent: Reik Schottstedt
Ausgabe: Fr 26.11.2010
Abgabe: Fr 03.12.2010 vor der Vorlesung
http://www.uni-marburg.de/fb12/stoch/teaching/elementare_stochastik_ws_10/

6. Übungsblatt
„Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik"

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Seien $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}^2(P)$. Die Kovarianz zwischen zwei Zufallsvariablen X_i und X_j ist bekanntlich durch

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\big[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\big]$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Die Kovarianz ist bilinear und symmetrisch.

(ii) $\mathrm{Cov}(X_i + b, X_j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

(iii) $\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^n X_i\big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**

(i) Sei $X : \Omega \to [0, \infty)$ eine Zufallsvariable. Die Laplace-Transformierte von X ist gegeben durch die Funktion

$$L_X(\lambda) = E[\exp(-\lambda X)],\ \lambda \in [0, \infty).$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte für eine binomial-verteilte Zufallsvariable X mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$.

(ii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable, so heißt die durch

$$\varphi_X(t) = E(t^X),\ t \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion die *erzeugende Funktion* von X. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen X mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$.

3. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ bzw. $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$. Ferner seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von

(i) $aX + b$,

(ii) $\min\{X, Y\}$ und $\max\{X, Y\}$.

(iii) Angenommen die ZVen X, Y seien exponential-verteilt zu den Parametern $\lambda_1 > 0$ bzw. $\lambda_2 > 0$ und die ZVen U, V seien uniform-verteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen und Erwartungswerte von $\min\{X, Y\}$ und $\min\{U, V\}$.

4. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

In einer Trommel seien n Lose mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$. Zwei Lose werden rein zufällig ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariablen X und Y bezeichnen die kleinere bzw. größere Nummer der gezogenen Lose.

(i) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung $P_{X,Y}$ von X und Y sowie die Marginalverteilungen P_X und P_Y.

(ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E[Y - X]$.

Hinweis: Sie können die Summenformel $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ benutzen.

5. Hausaufgabe: L **5 Punkte**

Zeigen Sie: Für $X \in \mathcal{L}^2(P)$ gilt:

(i)
$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \text{ und}$$

(ii)
$$\mathrm{Var}(X) = \min_{c \in \mathbb{R}} E[(X-c)^2] \text{ mit } E[X] = \arg\min_{c \in \mathbb{R}} E[(X-c)^2].$$

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.