Philipps-Universität Marburg **WS 2010/2011**
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich Ausgabe: Fr 03.12.2010
Assistent: Reik Schottstedt Abgabe: Fr 10.12.2010 vor der Vorlesung
http://www.uni-marburg.de/fb12/stoch/teaching/elementare_stochastik_ws_10/

7. Übungsblatt
„Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: * **5 Punkte**
Wir definieren für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) die *charakteristische Funktion* von X, $\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma_X(t) := \mathbb{E}\left[\exp(itX)\right].$$

Hierbei hängt γ_X nur von der Verteilung von X ab. Zwei gleich verteilte Zufallsvariablen haben also die gleiche charakteristische Funktion.

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion einer $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariable.

(b) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Summe $S := X+Y$ zweier unabhängigen und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen X, Y.

2. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

(a) Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ und Gewichten

$$p_X(k) := P\left(\{X = k\}\right), \, p_Y(k) := P\left(\{Y = k\}\right) \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Bestimmen Sie unter Annahme der Unabhängigkeit von X und Y eine allgemeine Formel für die Gewichte der Zufallsvariable $S := X + Y$.

(b) Für $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ seien X und Y zwei unabhängig $Poisson(\lambda_1)$- bzw. $Poisson(\lambda_2)$-verteilte Zufallsvariablen. Berechen Sie die Verteilung (Gewichte) von $S := X + Y$.

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in E. Sie erfüllen die Bedingung $-\log_2 p(X_1) \in \mathcal{L}^2$. Ihre *Entropie* ist gegeben durch

$$H(X_1) = \sum_{x \in E} -p_{X_1}(x) \log_2 p_{X_1}(x).$$

Es seien $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Mengen mit $\mathcal{C}_n \subset E^n$ und $|\mathcal{C}_n| \leq 2^{n(H(X_1)-\varepsilon)}$ für ein $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass gilt

$$P\left((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}_n\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige *Bernoulli*(p)-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei ferner $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ die Summe der ersten n der X_i und $Y_n := \exp(\alpha \cdot S_n)$ mit $\alpha > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für ein $q \in [0,1]$ gilt:

$$P(S_n > nq) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n]}{e^{\alpha n q}} = \frac{\mathbb{E}[\exp(\alpha S_n)]}{e^{\alpha n q}}$$

(b) Für welches $q \in [0,1]$ ist die obige Ungleichung aus (a) am stärksten, also der rechte Term am kleinsten. Finden Sie dieses q indem Sie das entsprechende Extremwertproblem lösen.

5. Hausaufgabe: L **5 Punkte**

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen. Die sog. *empirische Verteilungsfunktion* $\widehat{F}_n$ dieser Zufallsvariablen ist dann definiert durch

$$\widehat{F}_n(x) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(X_i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung, dass die empirische Verteilungsfunktion in Wahrscheinlichkeit gegen die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_1 konvergiert, d.h.

$$\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F_{X_1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.