Philipps-Universität Marburg **WS 2010/2011**
Fachgebiet Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Steffen Dereich Ausgabe: Fr 10.12.2010
Assistent: Reik Schottstedt Abgabe: Fr 17.12.2010 vor der Vorlesung
http://www.uni-marburg.de/fb12/stoch/teaching/elementare_stochastik_ws_10/

8. Übungsblatt
„Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: * **5 Punkte**
Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Es bezeichne X die Augenzahl des ersten Wurfs und Y das Maximum beider Augenzahlen.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsgewichte von Y gegeben $\{X = k\}$ für $k \in \{1, \ldots, 6\}$.

(ii) Für eine diskrete Zufallsvariablen Y wird der bedingte Erwartungswert von Y gegeben dem Ereignis B definiert durch $E[Y|B] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot p_{Y|B}(y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(\{Y = y\} |B)$. Ermitteln Sie damit $E[Y| \{X = k\}]$.

2. Hausaufgabe: * **5 Punkte**
Seien $X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \{-3, -2, 1, 4\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Gleichverteilung (Laplace Verteilung) auf $\{-3, -2, 1, 4\}$.

(a) Finden Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit
$$P(|X_1 + \ldots + X_n| \geq n).$$

(b) Folgern Sie daraus
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_1 + \ldots + X_n| \geq n) = 0.$$

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Wir spielen folgendes Spiel. Zum Zeitpunkt 0 ist eine Urne mit genau einer roten und genau einer weißen Kugel gegeben. Zu jeder positiven ganzzahligen Zeit $n \in \mathbb{N}$ ziehen wir eine Kugel aus der Urne (Laplace-verteilt) und legen diese wieder zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass wir, wenn wir das Spiel unendlich lange spielen, immer wieder (also unendlich oft) die weiße Kugel ziehen, wenn

(a) zu jeder Zeit zusätzlich zur gezogenen Kugel eine rote Kugel in die Urne gelegt wird?

(b) zu jeder Zeit $n \in \mathbb{N}$ zusätzlich zur gezogenen Kugel n rote Kugeln in die Urne gelegt werden?

4. Hausaufgabe: * **5 Punkte**

Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie das folgende Glücksspiel: Wenn vor der n-ten Runde Ihr Kapital K_{n-1} beträgt, dann erhalten Sie in der n-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze den Geldbetrag $\frac{2}{3}K_{n-1}$, sofern 'Zahl' erscheint, andernfalls verlieren Sie den Betrag $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

(a) Berechnen Sie EK_n und überzeugen Sie sich, dass $EK_n \to \infty$, $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $K_n \xrightarrow{P} 0$.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit

$$Y_i = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls in der } i\text{-ten Runde Zahl erscheint} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls in der } i\text{-ten Runde Kopf erscheint} \end{cases}.$$

Wenden Sie nun das schwache Gesetz der großen Zahlen auf $Z_i := \ln(Y_i)$ an.

5. Hausaufgabe: L **5 Punkte**

Eine internationale Versicherungsgesellschaft möchte in Deutschland tätig werden und gründet daher eine deutsche Tochtergesellschaft, die über ein Anfangskapital $u \geq 0$ verfügt. Die Tochtergesellschaft wird im k-ten Jahr nach der Gründung den zufälligen Betrag U_k zur Abwicklung von Schäden aufbringen müssen. Dabei besteht der Grund zur Annahme, das die jährlichen Schadenzahlungen unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert $\mu := E(U_1)$. Jährlich möchte man einen noch festzulegenden Betrag $c > 0$ an Versicherungsprämien einnehmen. Zeigen Sie, dass die Tochtergesellschaft langfristig ihr gesamtes Anfangskapital verlieren und zahlungsunfähig werden wird, wenn die jährliche Prämie echt kleiner als der erwartete jährliche Schaden gewählt wird, d.h. wenn $c < \mu$

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.