

## 9. Übungsblatt „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

---

### Hausaufgaben

#### 1. Hausaufgabe: \*

5 Punkte

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  sei gleich  $p$ . Es werden  $n$  unabh. Versuche durchgeführt.  $X/n$  sei die relative Häufigkeit von  $A$  in dieser Versuchsreihe. Mit der durch den ZGWS gegebenen Approximation der Binomialverteilung beantworte man folgenden Fragen:

- (i) Sei  $p = 0.3$  und  $n = 1800$ . Wie groß ist  $P(0.29 \leq X/n \leq 0.33)$ ?
- (ii) Sei  $p = 0.375$ . Wie groß muss  $n$  sein, damit  $P(|X/n - p| \leq 0.001) \geq 0.995$  ist?
- (iii) Sei  $p = 3/5$  und  $n = 1400$ . Wie groß muss  $\varepsilon$  gewählt werden, damit  $P(|X/n - p| < \varepsilon) \geq 0.99$  ist?
- (iv) Sei nun  $n = 7600$ . Für welche Werte von  $p$  wird  $P(|X/n - p| < 0.01) \geq 0.95$ ?

**Hinweis:** Verwenden Sie die auf dem Ferienübungsblatt gegebene Tabelle der Standardnormalverteilung.

#### 2. Hausaufgabe: \*

5 Punkte

Ein Experiment, bei dem ein Ereignis  $A$  mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 eintritt, wird 50 mal wiederholt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis  $A$  höchstens dreimal in diesen 50 Versuchen auftritt

- (i) durch exakte Rechnung,
- (ii) mit Hilfe der Poissonapproximation,
- (iii) mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

**3. Hausaufgabe: \*****5 Punkte**

Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  und  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Nehmen Sie an, es gelte  $X_n \xrightarrow{f.s.} X$  und  $Y_n \xrightarrow{f.s.} Y$ . Zeigen Sie:

(i)  $X_n + Y_n \xrightarrow{f.s.} X + Y$ ,

(ii)  $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{f.s.} X \cdot Y$ .

Nehmen Sie an, es gelte  $X_n \xrightarrow{P} X$  und  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ . Zeigen Sie:

(iii)  $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ ,

(\*\*)  $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} X \cdot Y$ .

*Sie können für die mit (\*\*) gekennzeichnete Teilaufgabe bis zu 2 Bonuspunkte erhalten.*

**4. Hausaufgabe:****5 Punkte**

Seien  $X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Zeigen Sie: Aus  $X_n \xrightarrow{P} X$  und  $X_n \xrightarrow{P} X'$  folgt  $P(X = X') = 1$ , d.h. der Grenzwert bei Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit ist  $P$ -f.s. eindeutig.

**5. Hausaufgabe: L****5 Punkte**

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass ein gebuchter Linienflug nur mit Wahrscheinlichkeit  $p = 0.9$  auch benützt wird. Sie akzeptiert deshalb mehr Buchungen als tatsächlich Plätze vorhanden sind. Wie viele Buchungen darf sie akzeptieren, wenn 150 Plätze zur Verfügung stehen, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbelegung kleiner als 0.05 sein soll? Nehmen Sie an, dass die Passagiere den Flug unabhängig voneinander antreten und approximieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

**Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit \* gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.**

**Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten  
und einen guten Start in das Jahr 2011.**