

10. Übungsblatt

„Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: *

5 Punkte

- (i) Gegeben sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zeigen Sie, dass für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gilt: $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- (ii) Gegeben seien n unabhängig identisch Poisson(1)-verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

2. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Sie werfen eine nicht notwendigerweise faire Münze (mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ für Kopf) 10 mal. Der Ausgang Ihres Experimentes ist 0011010001. Dabei bedeutet '1' Kopf und '0' Zahl. Geben Sie ein statistisches Modell für dieses Experiment an. Bestimmen Sie ferner die Likelihood-Funktion und den Maximum-Likelihood-Schätzer für p .

3. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Für $\theta \in [0, 1]$ seien die Zufallsvariablen X_θ Bin(N, θ)-verteilt. Man zeige, dass für alle $\gamma \geq 0$ die Funktion $h(\theta) := P\{X_\theta \leq \gamma\}$ monoton in θ ist.

4. Hausaufgabe:

5 Punkte

Es sei $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeigen Sie, dass für $y > 0$ gilt

$$(1 - \Phi(y)) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} \exp(-y^2/2).$$

5. Hausaufgabe: L**5 Punkte**

Sie werfen eine nicht notwendigerweise faire Münze (mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ für Kopf) 10 mal. Der Ausgang Ihres Experimentes ist 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1. Dabei bedeutet '1' Kopf und '0' Zahl.

- (i) Erklären Sie allgemein die Begriffe Messergebnis, Standardmodell, Produktmodell und Schätzer.
- (ii) Geben Sie jeweils das Standardmodell, das Produktmodell und das Messergebnis in der obigen Situation an. Geben Sie zwei Schätzer für p an.

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich 3 der ersten vier Aufgaben. Ihnen wird empfohlen, die mit * gekennzeichneten Aufgaben zu bearbeiten. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben eines jeden Übungsblatts.