11. Übungsblatt „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: *

10 Punkte

Ein Experiment liefert unabh. $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Werte mit unbekanntem Parameter $\lambda = 1/\vartheta > 0$.

- (i) Geben Sie das Statistische Modell in diesem Beispiel an.
- (ii) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für ϑ .
- (iii) Ist T_{ML} erwartungstreu?
- (iv) Bestimmen Sie $\text{Var}_{\vartheta}(T_{ML})$.
- (v) Berechnen Sie den MSE von T_{ML} .
- (vi) Bestimmen Sie die Fisher-Information.
- (vii) Erreicht der Schätzer T_{ML} die Cramér-Rao-Schranke?

Hinweis: Eine $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable X hat Dichte $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{\{x \geq 0\}}$.

2. Hausaufgabe:

5 Punkte

Ein Experiment liefert unabh. Poisson-verteilte Werte mit unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$.

- (i) Geben Sie das Statistische Modell in diesem Beispiel an.
- (ii) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für ϑ .
- (iii) Ist T_{ML} erwartungstreu?
- (iv) Bestimmen Sie $\text{Var}_{\vartheta}(T_{ML})$.
- (v) Berechnen Sie die Fisher-Information.
- (vi) Erreicht der Schätzer T_{ML} die Cramér-Rao-Schranke?

Hinweis: Sie können ohne Beweis nutzen: Für $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$, gilt $EX = \text{Var}(X) = \lambda$.

3. Hausaufgabe: ***5 Punkte**

Ein Experiment liefert unabh. identisch verteilte Werte $X_1, \dots, X_n$ mit positiven, endlichen zweiten Momenten. Ferner seien die Gewichte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ gegeben. Zeigen Sie:

- (i) Für jede Wahl der $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ist

$$T_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\mu = E[X_1]$.

- (ii) Für die Wahl $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ erhalten wir den Schätzer, der von allen oben beschriebenen die kleinste Varianz hat (*varianzminimaler* Schätzer).

4. Hausaufgabe: L**5 Punkte**

Um bei Umfragen zu heiklen Themen („Nehmen Sie harte Drogen?“) die Privatsphäre der befragten Person zu schützen und zuverlässige Antworten zu bekommen, wurde das folgende „*Unrelated Question*“-Befragungsmodell vorgeschlagen: Ein Stapel Fragekarten ist genau zur Hälfte mit der heiklen Frage A und zur anderen Hälfte mit der einer harmlosen Frage B beschriftet, welche mit Frage A nichts zu tun hat („Waren Sie im letzten Monat im Kino?“). Der Interviewer lässt den Befragten die Karten mischen, eine Karte verdeckt ziehen und die darauf gestellte Frage beantworten. Anschließend notiert sich der Interviewer die Antwort (J='Ja' oder N='Nein') und lässt den Befragten die gezogene Karte wieder untermischen. Es handelt sich also um ein sogenanntes *zweistufiges* Zufallsexperiment. Die erste zufällige Größe ist die gezogene Frage, die zweite die darauf gegebene Antwort. Es werden n Personen unabhängig befragt. Ferner sind folgende Parameter bekannt:

- $P(\text{Antwort 'Ja'} | \text{Frage B}) = 2/3$
- $P(\text{Frage B}) = 1/2$

Gesucht ist die Größe $\vartheta := P(\text{Antwort 'Ja'} | \text{Frage A})$. Modellieren Sie die Befragung durch ein statistisches Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, (P_\vartheta)_{\vartheta \in (0,1)})$. Wie soll $\mathcal{X}$ und P_ϑ explizit gewählt werden? Geben Sie ferner einen Schätzer T_n für ϑ an und überprüfen Sie, ob dieser erwartungstreu ist.

Hinweis: $\mathcal{X}$ entspricht der Beobachtung und P_ϑ kann mithilfe der Wahrscheinlichkeitsgewichte angegeben werden.

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich die mit * gekennzeichneten Aufgaben. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten drei Aufgaben des Übungsblatts.