11. Übungsblatt „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: *

5 Punkte

- (i) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz von Moivre-Laplace.
- (ii) Eine faire Münze mit den Symbolen 'Adler' und 'Zahl' werde 1000 mal geworfen. Die Zufallsvariable S gibt die Anzahl der Versuche an, bei denen 'Adler' oben liegt. Berechnen Sie approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes
 - (a) $P(480 \leq S \leq 520)$ und
 - (b) $P(S \geq 540)$.

2. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Aus einer Urne mit 10 Kugeln werden 6 Kugeln ohne zurcklegen gezogen. In der Urne befinden sich eine unbekannte Anzahl ϑ schwarze Kugeln. Es bezeichne X die Anzahl der schwarzen gezogenen Kugeln.

- (i) Bestimmen Sie für jedes feste $\vartheta \in \{0, \dots, 10\}$ eine möglichst kleine Menge $C_\vartheta \subset \{0, \dots, 6\}$ mit $P_\vartheta(X \in C_\vartheta) \geq 0.9$.
- (ii) Geben Sie für jede mögliche Realisierung x von X die Konfidenzbereiche $C(x) = \{\vartheta : x \in C_\vartheta\}$ an.

3. Hausaufgabe: *

5 Punkte

Gegeben sei das Gaußmodell $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n, (N(\mu, 4)^{\otimes n})_{\mu \in \mathbb{R}})$. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.05.

4. Hausaufgabe: ***5 Punkte**

Sei X eine $t(\nu)$ -verteilte Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}\right)^{-1}$$

- (i) $X \in \mathcal{L}^p \iff \nu > p$.
- (ii) Zeigen Sie: Für $\nu > 1$ gilt $EX = 0$.

5. Hausaufgabe: L**5 Punkte**

Ein Experiment liefert n unabh. und identisch normalverteilte Werte mit festem Erwartungswert $\mu = 0$ und unbekannter Varianz $\nu > 0$.

- (i) Geben Sie das Statistische Modell in diesem Beispiel an.
- (ii) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für ν .

Studierende des Lehramts, die nach der neuen Studienordnung studieren, bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe und zusätzlich die mit * gekennzeichneten Aufgaben. Studierende aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten drei Aufgaben des Übungsblatts.