Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Steffen. Dereich
Reik Schottstedt, Florian Ketterer

WS 2010/2011

Blatt 0

Übungen zur Vorlesung

Stochastik 0

Aufgabe 1 (keine Abgabe)
Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \text{ und } Z := \frac{X}{1+X}.$$

Aufgabe 2 (keine Abgabe)
Auf wieviele Arten kann man 40 Student(inn)en in vier Tutorien mit je zehn Personen einteilen, wenn die Tutorien

(i) unterscheidbar sind?

(ii) ununterscheidbar sind?

Aufgabe 3 (keine Abgabe)
Es sei $X \sim Bin(n,p)$. Folgern Sie, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$P\left(\left|\frac{1}{n}X - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \ .$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(i) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Wann heißen die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig?

(ii) Seien $X \sim Poi(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ und $Y \sim Poi(\mu)$ $(\mu > 0)$ unabhängig. Zeigen Sie: $X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$.

(iii) Bestimmen Sie (in der Situation von (ii)) die bedingte Verteilung von $X|X+Y=n$.

Hinweis: $X \sim Poi(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, falls

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 5 (keine Abgabe)
Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} x^{-\alpha} \; , & x \geq 1 \\ 0 \; , & x < 1 \end{cases} \quad , \quad \alpha > 1 \; . \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $c \cdot f$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt.

(ii) Nehmen Sie an, Sie hätten Realisierungen $u_1, u_2, \ldots$ einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen U. Wie erzeugen Sie daraus Realisierungen einer Zufallsvariablen mit Dichte (1)?

Aufgabe 6 (keine Abgabe)
Angenommen 1% der Bevölkerung ist farbenblind. Wie viele Personen müssen aus der Bevölkerung zufällig ausgewählt werden (mit Zurücklegen), wenn diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine farbenblinde Person enthalten soll?

Aufgabe 7 (keine Abgabe)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subset \Omega$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie:

(i) $A^{\complement}$ und $B^{\complement}$ sind unabhängige Ereignisse.

(ii) Ist $A \subset B$, so gilt $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.

Aufgabe 8 (keine Abgabe)

(i) Eine unverfälschte Münze wird achtmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt dabei Zahl

- höchstens einmal und
- mindestens einmal?

(ii) Wie oft muss die Münze geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestens einmal Zahl fällt?

Aufgabe 9 (keine Abgabe)
Mit einem Lügendetektor werden des Diebstahls verdächtige Personen überprüft. Die Gruppe der Verdächtigen besteht aus 20 Personen von denen genau einer den Diebstahl begangen hat. Der Lügendetektor erkennt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 einen Schuldigen, wenn dieser getestet wird. Allerdings zeigt er auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 an, dass eine Person schuldig ist, wenn sie tatsächlich unschuldig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine rein zufällig ausgewählte Person tatsächlich schuldig, wenn der Detektor dies anzeigt?

Definition (*Faltungsformel für Dichten*): Seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Dichten f bzw. g. Dann hat ihre Summe $Z = X + Y$ Dichte

$$h(z) = g \star f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)\,dy.$$

Aufgabe 10 (keine Abgabe)
Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Dichte einer Gammaverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ (Schreibweise $G(n,\lambda)$)gegeben durch

$$g_{n,\lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty)}(x).$$

Zeigen Sie: Ist $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $X_1 \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, so ist $\sum_{i=1}^n X_i$ gammaverteilt mit Parameter n und λ für alle $n \in N$.

Aufgabe 11 (keine Abgabe)
Die Zufallsvariablen $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ seien unabhängig.
Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ mit der Faltungsformel.

Aufgabe 12 (keine Abgabe)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
Wann existiert der Erwartungswert EX und wie ist dieser definiert?

Aufgabe 13 (keine Abgabe)
Seien A und B fast sichere Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann das Ereignis, dass sowohl A als auch B eintreten, ein fast sicheres Ereignis ist.

Aufgabe 14 (keine Abgabe)

(i) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie $E[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(ii) Sei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ die Dichte der Standardnormalverteilung und $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ die Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Sei $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Berechnen Sie $P(0 \leq X \leq 2)$.

keine Abgabe
Einige ausgewählte Aufgaben werden nach der Weihnachtspause besprochen.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und einen guten Start in das Jahr 2011.

	Δx									
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung. Tabelliert sind die Werte $\Phi(x+\Delta x)$