Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

Übungen zur Stochastik 2

- Blatt 1 -

Abgabe: Montag, 25.10.2010

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\mathbf{E}X < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) < \infty$$

aus der Vorlesung.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Das Maß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e}\frac{1}{x!} & , \quad x \in \mathbb{N}_0 \, , \\ e^{-2x} & , \quad x \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}_0 \, , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

bzgl. dem σ-endlichen Maß

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_k + \lambda_{[k,k+1)}) \, .$$

(i) Skizzieren Sie die zu P gehörige Verteilungsfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d.h. $P(\mathbb{R}) = 1$.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $Y : \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable mit $0 < \mathbf{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie die untere Schranke

$$P(Y > 0) \geq \frac{(\mathbf{E}Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $Y\mathbf{1}(Y > 0)$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[q_n, \infty)}(x) \,.$$

Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.