Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

10. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: keine Abgabe!

Aufgabe 36 (2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Weiter sei $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $c > 0$ gilt

$$P(|X| < c) \leq \frac{\mathbf{E}(\psi(|X|))}{\psi(c)}.$$

Aufgabe 37 (6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum sowie $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ Mengensysteme und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen.

(i) Definieren Sie den Begriff der *Unabhängigkeit* für

a) die endliche Familie $A_1, \ldots, A_n$,

b) die Mengensysteme $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ und schließlich für

c) die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.

(ii) Zeigen Sie die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen:

a) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig.

b) Die σ-Algebren $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ sind unabhängig.

c) Für alle $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n).$$

Aufgabe 38 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariable mit Lebesgue-Dichten f und g. Bestimmen Sie die Dichte von $Z = XY$.

Aufgabe 39 (6 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

(i) Definieren Sie den Begriff der *charakteristischen Funktion* von Y und begründen Sie deren Existenz.

(ii) Sei Y doppel-exponentialverteilt mit Lebesgue-Dichte

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\,.$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion von Y.

(iii) Begründen Sie mit dem Ergebnis von (ii), dass

$$\int e^{-itx}\, \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-|x|} \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ und $\mathbf{V}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ sowie $Y_1, Y_2, \ldots$ u.i.v. mit $\mathbf{E}(Y_1) = \nu \neq 0$. Zeigen Sie, dass fast sicher gilt

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{k=1}^n Y_k} = \frac{\mu}{\nu}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 = \sigma^2.$

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von u.i.v Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}(X_1) = 0$ und $\mathbf{V}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n X_j^2}} \Rightarrow Z\,,$$

wobei $Z \sim N(0, 1)$.

Aufgabe 42 (8 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von u.i.v. Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathbf{E}(X_1) = 0$ und $\mathbf{V}(X_1) = 1$. Weiter sei $Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$.

(i) Definieren Sie den Begriff der *terminalen σ-Algebra* $\mathcal{T}$ der Folge (X_n).

(ii) Zeigen Sie, dass für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Big\{ \limsup_n Y_n < y \Big\} \in \mathcal{T}\,.$$

(iii) Verwenden Sie das Lemma von Fatou und zeigen Sie

$$P\big(\limsup_n Y_n < y\big) \leq \liminf_n P(Y_n < y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

(iv) Folgern Sie, unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes und dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov, dass fast sicher gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\,.$$

Hinweis

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung des bisherigen Vorlesungsstoffs und muss nicht abgegeben werden. Einzelne Aufgaben sollen jedoch im ersten Tutorium nach den Weihnachtsferien, 13./14.01.11, von Ihnen vorgestellt werden. Vielleicht lassen sich damit auch so manche Bonuspunkte verbinden ;)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!