Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

11. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: 17.01.2011

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariable. Es gelte

$$|X_k| \leq C \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ sowie $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{V}(X_k) = \infty$.

(i) Begründen Sie, warum die Varianzen $\mathbf{V}(X_k)$ existieren.

(ii) Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbf{E}(X_k))}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)}} \Rightarrow N(0,1)\,.$$

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[-n, n]$. Für feste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ seien weiter

$$X_{n,k} = \begin{cases} 1\,, & \xi_{n,k} \in (a,b)\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ gilt

$$S_n \Rightarrow \mathrm{Poi}\big((b-a)/2\big)\,.$$

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}\big)$.

(i) Es sei f die Identität auf $[0,1]$, $f(x) = x$, sowie

$$\mathcal{G} = \{A \subset [0,1] \mid A \text{ abzählbar oder } A^{\complement} \text{ abzählbar}\}\,.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{E}(f|\mathcal{G})$.

(ii) Seien $X_1 = 0$ und $X_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]} - (n-1)\mathbf{1}_{[0,1/(n-1)]}$ für $n \geq 2$. Weiter sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimmen Sie $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

Aufgabe 46

(4 Punkte)

Seien X_1 und X_2 beschränkte Zufallsvariable, $|X_i| \leq C_i$, auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ Teil-σ-Algebren mit X_i messbar bzgl. $\mathcal{A}_i$. Weiter sei

$$\kappa = \sup_{A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2} |P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)|\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)| \leq C_1\mathbf{E}\big(|\mathbf{E}(X_2|\mathcal{A}_1) - \mathbf{E}(X_2)|\big)\,.$$

(ii) Folgern sie, dass mit $\xi_1 = \operatorname{sign}(\mathbf{E}(X_2|\mathcal{A}_1) - \mathbf{E}(X_2))$ gilt

$$|\mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)| \leq C_1|\mathbf{E}(\xi_1X_2) - \mathbf{E}(\xi_1)\mathbf{E}(X_2)|\,.$$

(iii) Begründen Sie, dass weiter eine Zufallsvariable ξ_2 existiert mit

$$|\mathbf{E}(\xi_1X_2) - \mathbf{E}(\xi_1)\mathbf{E}(X_2)| \leq C_2|\mathbf{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbf{E}(\xi_1)\mathbf{E}(\xi_2)|\,.$$

(iv) Folgern Sie schließlich

$$|\mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)| \leq 4C_1C_2\kappa\,.$$