

12. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: 24.01.2011

Aufgabe 47

(4 Punkte)

Seien X eine integrierbare Zufallsvariable auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $B_1, \dots, B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω .

(i) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \sigma(B_1, \dots, B_n) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

(ii) Bestimmen Sie $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$.

Aufgabe 48

(4 Punkte)

Seien X und Y integrierbare Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen sie, dass Y für jede Teil- σ -Algebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ genau dann eine Version der bedingten Erwartung $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ ist, wenn Y $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist sowie für einen $\cap$ -stabilen Erzeuger $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ von $\mathcal{F}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ gilt

$$\int_E Y dP = \int_E X dP \quad , \quad E \in \mathcal{E}.$$

Aufgabe 49

(4 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathbf{E}(|Y|) < \infty$, $\mathbf{E}(|XY|) < \infty$ und sei X messbar bzgl. einer Teil- σ -Algebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbf{E}(Y|\mathcal{F}).$$

Aufgabe 50

(4 Punkte)

Wir betrachten den W-Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), N(0, 1))$ sowie die darauf definierten Zufallsvariablen X, Y gemäß $X(\omega) = \omega$ und $Y(\omega) = (\cos(\omega), \sin(\omega))$. Zeigen Sie:

(i) Jede $\sigma(Y)$ -messbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die Periode 2π , d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist $f(x + 2\pi z) = f(x)$.

(ii) Bezeichnet φ die Dichte der Standardnormalverteilung, so gilt

$$\mathbf{E}(X|Y)(x) = \frac{\sum_{z \in \mathbb{Z}} (x + 2\pi z) \varphi(x + 2\pi z)}{\sum_{z \in \mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi z)} .$$