Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

13. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: 31.01.2011

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathbf{E}(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, sowie $S_n = X_1 + \dots + X_n$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(S_n^2)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal ist.

(ii) Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung von $(S_n^2)_n$ und vereinfachen Sie diese.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariable mit Verteilung μ sowie $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine messbare und symmetrische Funktion, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und Permutationen π von $\{1, \dots, m\}$ ist $h(x_1, \dots, x_m) = h(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)})$. Weiter sei $\mathbf{E}(|h(X_1, \dots, X_m)|) < \infty$ und

$$\mathbf{E}(h(x_1, \dots, x_{m-1}, X_m)) = 0$$

für alle $x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass mit

$$S_n(h) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} h(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

der Prozess $(S_n(h))_n$ ein $(\mathcal{F}_n^X)$-Martingal ist.

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P)$ ein filtrierter W-Raum und darauf $(X_n)_n$ und $(Y_n)_n$ zwei Submartingale sowie N eine Stoppzeit mit $X_N \le Y_N$. Weiter sei

$$Z_n = \mathbf{1}_{(N \ge n)} X_n + \mathbf{1}_{(N < n)} Y_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_{(N \ge n)}$ prävisibel ist.

(ii) Folgern Sie damit, dass auch $(Z_n)_n$ ein Submartingal ist.

Aufgabe 54 (4 Punkte)

Zu einem quadratisch integrierbaren $(\mathcal{F}_n)$-Martingal $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man dessen *quadratischen Variationsprozess* $\langle \boldsymbol{X} \rangle$ gemäß

$$\langle X \rangle_n = \sum_{i=2}^{n} \mathbf{E}\big((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}\big) \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(i) Begründen Sie anhand der Doob-Zerlegung des Prozesses $(X_n^2)_n$, dass $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)_n$ ein Martingal ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt

$$\mathbf{E}\big(\langle X \rangle_\tau\big) = \mathbf{E}\big((X_\tau - X_1)^2\big)\,.$$