Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

14. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: 07.02.2011

Aufgabe 55 (8 Punkte)

Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P(\xi_k = 1) = P(\xi_k = -1) = 1/2$, $k \in \mathbb{N}$, und damit $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ die einfache symmetrische Irrfahrt. Für feste $a, b \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Stoppzeit $\tau_{\{a,-b\}} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = a \vee X_n = -b\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(M_n)_n$ mit $M_n = X_n^2 - n$ ein $(\mathcal{F}_n^\xi)$-Martingal ist.

(ii) Folgern Sie $\mathbf{E}(M_{\tau_{\{a,-b\}} \wedge n}) = 0$ und damit $\mathbf{E}(M_{\tau_{\{a,-b\}}}) = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass andererseits fast sicher gilt

$$M_{\tau_{\{a,-b\}}} = a^2 \mathbf{1}_{\{X_{\tau_{\{a,-b\}}} = a\}} + b^2 \mathbf{1}_{\{X_{\tau_{\{a,-b\}}} = b\}} - \tau_{\{a,-b\}}$$

und folgern Sie damit und (ii) schließlich

$$\mathbf{E}\big(\tau_{\{a,-b\}}\big) = a^2 P\big(X_{\tau_{\{a,-b\}}} = a\big) + b^2 P\big(X_{\tau_{\{a,-b\}}} = b\big) = ab\,.$$

(iv) Finden sie Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, so dass $Y_n = X_n^4 - 6nX_n^2 + \gamma_1 n^2 + \gamma_2 n$ ein Martingal ist und berechnen Sie damit $\mathbf{V}(\tau_{\{a,-a\}})$.

(v) Sei $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = a\}$. Zeigen Sie mit (iii), dass $\mathbf{E}(\tau_a) = \infty$.

Aufgabe 56 (6 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ ein filtrierter W-Raum und $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \in -\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptiertes Rückwärtsmartingal, d.h.

$$\mathbf{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad , \quad n = -1, -2, \ldots$$

Weiter sei $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}_n$ und für feste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ bezeichne analog zur Vorlesung $U_{\boldsymbol{X}}(a, b, N)$ die Anzahl der Upcrossings des Invervalls $[a, b]$ der Folge $X_0, X_{-1}, X_{-2}, \ldots$ bis zum Zeitpunkt N. Zeigen Sie:

(i) Die Folge $\big(\mathbf{E}(U_{\boldsymbol{X}}(a, b, N))\big)_{N \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt.

Hinweis: Wenden Sie hierfür die Doob'sche Upcrossingungleichung auf das Martingal $X_{-N}, \ldots, X_0$ an.

(ii) Es existiert eine $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbare Zufallsvariable $X_{-\infty}$, für die fast sicher gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_{-\infty}\,.$$

(iii) Ist die Folge $(X_n)_n$ sogar gleichmäßig beschränkt, so ist

$$\mathbf{E}(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) = X_{-\infty}\,.$$

Hinweis

Die auf diesem Blatt erzielten Punkte gehen als Bonuspunkte in die Gesamtwertung ein.