Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

2. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 1.11.2010

Aufgabe 5

(4 Punkte)

Sei μ die symmetrische Dreiecksverteilung auf $(-1,1)$ mit Lebesgue-Dichte

$$f(x) = (1 - |x|)\, \mathbf{1}_{(-1,1)}(x)\ .$$

(i) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von μ.

(ii) Folgern Sie, dass die Fouriertransformation der Pólya-Verteilung mit Lebesgue-Dichte $g(x) = (1 - \cos x)/\pi x^2$ gerade f entspricht.

Aufgabe 6

(4 Punkte)

Seien P und Q zwei W-Maße auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Fouriertransformationen φ_P und φ_Q. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int e^{-ixy} \varphi_P(y)\, Q(dy) = \int \varphi_Q(y - x)\, P(dy)\ .$$

Aufgabe 7

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Tchebychef-Ungleichung sowohl nicht straff als auch straff ist, indem Sie nachprüfen, dass

(i) für jede Zufallsvariable X mit $0 < \mathbf{E}(X^2) < \infty$ gilt

$$\lim_{a\to\infty} a^2 P(|X| \geq a)/\mathbf{E}(X^2) = 0\ ,$$

(ii) jedoch für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b \leq a$ eine Zufallsvariable Y existiert mit $\mathbf{E}(Y^2) = b^2$ und $P(|Y| \geq a) = b^2/a^2$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und P, Q W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Dichten $f, g : \Omega \to (0, \infty)$ bzgl. μ. Dann ist der *Kullback-Leibler-Abstand* zwischen P und Q definiert durch

$$D(P, Q) = \int \log(f/g)\, dP\,.$$

(i) Zeigen Sie, unter Verwendung der Jensenschen-Ungleichung, dass dieser Abstand nicht-negativ ist, d.h. $D(P, Q) \geq 0$.

(ii) In welchem Fall gilt $D(P, Q) = 0$?