Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

3. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 8.11.2010

Aufgabe 9

(4 Punkte)

Sei P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Fouriertransformation φ_P. Imitieren Sie den Beweis zur Inversionsformel, um zu zeigen, dass

$$P(\{x\}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi_P(t)\, dt$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10

(4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung P_X. Zeigen Sie:

(i) Existiert ein $h > 0$ mit $P(X \in h\mathbb{Z}) = 1$, so ist $\varphi_{P_X}(2\pi/h + t) = \varphi_{P_X}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) In diesem Fall gilt für alle $x \in h\mathbb{Z}$

$$P(X = x) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-itx} \varphi_{P_X}(t)\, dt\, .$$

Aufgabe 11

(4 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariable und $Z := X + Y$. Zeigen Sie: Ist die charakteristische Funktion von X auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ungleich null, so ist die Verteilung von Y eindeutig durch die Verteilungen von X und Z bestimmt.

Aufgabe 12

(4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable. Weiter besitze die Verteilung von $(X_1, \ldots, X_n)$ die Lebesgue-Dichte f, d.h. für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \int_A f(x)\, dx\, .$$

Zeigen Sie: Existieren messbare Funktion $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit

$$f(x) = g_1(x_1) \cdot \ldots \cdot g_n(x_n) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

so sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig.

Hinweis: Es wird nicht vorausgesetzt, dass die g_k Dichten sind!