

4. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 15.11.2010

Aufgabe 13

(4 Punkte)

Seien X_1, X_2 unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ sowie Y gammaverteilt mit Parametern $\alpha, \beta > 0$, d.h. Y besitzt die Lebesgue-Dichte

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$$

mit

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \quad , \quad y \in \mathbb{R}.$$

- (i) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von Y .
- (ii) Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$
 - a) unter Verwendung der Faltungsformel sowie
 - b) mit Hilfe der charakteristischen Funktionen von X_1 und X_2 .

Aufgabe 14

(4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $X_1, \dots, X_{n+1}$ sind unabhängig.
- (ii) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig sowie $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ und $\sigma(X_{n+1})$ sind unabhängig.

Aufgabe 15

(4 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariable, $Y \neq 0$ fast sicher, mit Lebesgue-Dichten f und g . Zeigen Sie, dass $Z = X/Y$ die Lebesgue-Dichte

$$h(x) = \int f(xy)g(y)|y| dy$$

besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Transformationsformel für stetig differenzierbare Bijektionen.

Aufgabe 16

(4 Punkte)

Sei (X, Y) bivariat standardnormalverteilt mit Lebesgue-Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Weiter bezeichne r die Länge des Vektors (X, Y) und φ den Winkel zwischen Vektor und x -Achse, so dass

$$(X, Y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

- (i) Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von r und φ .
- (ii) Folgern Sie, dass r und φ unabhängig sind.