Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

5. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 22.11.2010

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Seien $(N_t)_{t\geq 0}$ und $(N'_t)_{t\geq 0}$ zwei Poisson-Prozesse mit Intensitäten $\lambda, \lambda' > 0$. Die Prozesse, d.h. $\sigma(N_t : t \geq 0)$ und $\sigma(N'_t : t \geq 0)$, seien unabhängig. Zeigen Sie, dass dann die Familie $(N_t + N'_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda + \lambda'$ ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & , \quad t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Weiter seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilung und

$$M_t(\omega) = N_t(\omega) + f(t + X(\omega)) \quad , \quad \omega \in \Omega,\, t \geq 0\,.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Familie $(M_t)_{t\geq 0}$ ist kein Poisson-Prozess, denn die zugehörigen Pfade sind nirgends stetig und nicht monoton wachsend.

(ii) Die Prozesse $(M_t)_{t\geq 0}$ und $(N_t)_{t\geq 0}$ besitzen die selben endlichdimensionalen Verteilungen, da für beliebiges $t \geq 0$ gilt $P(M_t = N_t) = 1$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Seien $X, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(i) Konvergiert X_n P-fast sicher gegen X, so konvergiert auch $f(X_n)$ P-fast sicher gegen $f(X)$.

(ii) Konvergiert X_n gegen X in P-Wahrscheinlichkeit, so konvergiert auch $f(X_n)$ gegen $f(X)$ in P-Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass f_n genau dann in P-Wahrscheinlichkeit gegen f konvergiert, wenn die einzelnen Koordinatenfunktionen $f_n^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$, gegen $f^{(k)}$ in P-Wahrscheinlichkeit konvergieren.

Hinweis: Für $u, v \geq 0$ ist $\{u + v > \varepsilon\} \subset \{u > \varepsilon/2\} \cup \{v > \varepsilon/2\} \subset \{u + v > \varepsilon/2\}$.