6. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 29.11.2010

Aufgabe 21

(4 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine unabhängige Folge reeller, identisch verteilter und integrierbarer Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathbf{E}(X_1) > 0$. Zeigen Sie, dass für die Partialsummenfolge

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

dann P -fast sicher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty .$$

Aufgabe 22

(4 Punkte)

Wir betrachten den W-Raum $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), \lambda_{(0,1]})$ und für jedes $\omega \in (0, 1]$ dessen eindeutige Binärdarstellung

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)/2^n ,$$

wobei

$$A_n = (1/2^n, 2/2^n] \cup (3/2^n, 4/2^n] \cup \dots \cup ((2^n - 1)/2^n, 1] .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $S_n^0(\omega)$ die Anzahl aller Nullen sowie $S_n^1(\omega)$ die Anzahl aller Einsen in der Binärdarstellung von ω bis zur n -ten Nachkommestelle. Wir nennen eine Zahl ω *normal*, falls für $k = 0, 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^k(\omega)}{n} = 1/2 .$$

Zeigen Sie, dass $\lambda_{(0,1]}$ -fast alle Zahlen in $(0, 1]$ normal sind.

Aufgabe 23

(5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ und

$$\liminf_n \frac{\sum_{i,j=1}^n P(A_i \cap A_j)}{(\sum_{i=1}^n P(A_i))^2} \leq 1 .$$

Definiere $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$X_n = \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n} .$$

- (i) Berechnen Sie die Varianz von X_n .
- (ii) Zeigen Sie, unter Verwendung der Tchebychef-Ungleichung, dass für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\liminf_n P(X_n \leq k) \leq \liminf_n \frac{\mathbf{V}(X_n)}{(\mathbf{E}(X_n) - k)^2}$$

und folgern Sie $\liminf_n P(X_n \leq k) = 0$.

- (iii) Verwenden Sie (ii), um zu zeigen, dass

$$P(\sup_n X_n \leq k) = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} .$$

- (iv) Folgern Sie schließlich

$$P(\limsup_n A_n) = 1 .$$

Aufgabe 24

(3 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 23 das zweite Borel-Cantelli-Lemma.