Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik und Informatik Daniel Hohmann
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik
WS 2010/11

7. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 6.12.2010

Aufgabe 25 (6 Punkte)

Seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $(0,1)$ und $U_{1:n} < \dots < U_{n:n}$ die zugehörigen Ordnungsstatistiken. Zeigen Sie:

(i) Für alle $k = 1, \dots, n$ gilt

$$F_{k:n}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

und

$$f_{k:n}(x) = n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \quad , \quad x \in (0,1)\,,$$

wobei $F_{k:n}$ die Verteilungsfunktion und $f_{k:n}$ die Lebesgue-Dichte von $U_{k:n}$ bezeichne.

(ii) Es gilt

$$\mathbf{E}\big(U_{(n+1):(2n+1)}\big) = 1/2\,,$$

d.h. unabhängig von n ist die zentrale Ordnungsstatistik $U_{(n+1):(2n+1)}$ tatsächlich zentriert.

(iii) Berechnen Sie die Varianz von $U_{(n+1):(2n+1)}$.

Hinweis: Verwenden Sie die *Eulersche Betafunktion*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \quad , \quad x, y > 0$$

mit dem funktionalen Zusammenhang $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X, X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{Z}$ ganzzahlige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_n$ genau dann schwach gegen X konvergiert, wenn für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = z) = P(X = z)\,.$$

Aufgabe 27 (6 Punkte)

Seien $F, F_1, F_2, \ldots$ Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$. Belegen Sie jede der drei folgenden Behauptungen anhand eines Beispiels:

(i) Besitzen alle obigen Verteilungsfunktionen Lebesgue-Dichten, so folgt aus der schwachen Konvergenz $F_n \Rightarrow F$ nicht die Konvergenz der Dichten.
Hinweis: Betrachten Sie $f_n(x) = 1 + \cos(2\pi n x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

(ii) Haben die F_n Lebesgue-Dichten, so braucht F trotz der schwachen Konvergenz $F_n \Rightarrow F$ keine Lebesgue-Dichte besitzen.
Hinweis: Betrachten Sie eine Verteilung F mit gesamter Masse in einem einzelnen Punkt.

(iii) Sind die F_n diskrete Verteilungen, so kann trotzdem F eine Lebesgue-Dichte besitzen und es gilt $F_n \Rightarrow F$.