Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik und Informatik
Arbeitsgebiet Stochastik und
mathematische Statistik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

WS 2010/11

8. Übungsblatt zur Stochastik 2

Abgabe: Montag, 13.12.2010

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, reelle Zufallsvariable auf W-Räumen $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) Die Folge $(X_n)_n$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen eine Konstante $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Bezeichnet φ_{X_n} die charakteristische Funktion von X_n, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{iat}\,.$$

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Für Verteilungsfunktionen F und G auf $\mathbb{R}$ definiert man die *Lévy-Metrik* ρ gemäß

$$\rho(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon \;\forall\, x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Zeigen Sie:

(i) Durch ρ wird tatsächlich eine Metrik definiert.

(ii) Sind $F, F_1, F_2, \ldots$ Verteilungsfunktionen, so konvergiert $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. ρ genau dann gegen F, wenn $F_n \Rightarrow F$.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, eine Folge normalverteilter, reeller Zufallsvariable mit $X_n \Rightarrow X$ für eine weitere Zufallsvariable X. Zeigen Sie:

(i) $\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$ existiert mit $\sigma^2 \in [0,\infty)$.

(ii) $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ existiert.

(iii) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Hierbei sei $N(\mu, 0)$ die ausgeartete Normalverteilung mit $P(X = \mu) = 1$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Seien $X, Y, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariable mit $X_n \Rightarrow X$ und $Y_n \Rightarrow Y$. Für jedes n seien X_n und Y_n unabhängig. Außerdem seien X und Y unabhängig. Zeigen Sie:

(i) $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

(ii) $\begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$.