Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 28.10.11

Aufgabe 1) **(2+2 Punkte)**

In einem Sack befinden sich vier Kugeln, je zwei mit den Farben rot und blau. Sie ziehen (ohne Zurücklegen) nacheinander zwei Kugeln und notieren sich, welche Farben Sie in welcher Reihenfolge gezogen haben (r='rot', b='blau').

a) Modellieren Sie dieses Experiment mit den Begriffen aus der Vorlesung, indem Sie einen sinnvollen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) angeben.

b) Sind alle möglichen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich? Woher kommt das?

Aufgabe 2) **(3+1 Punkte)**

Gegeben seien drei identische Kartenspiele mit jeweils n unterschiedlichen Karten. Zunächst mischen Sie jedes Kartenspiel. Danach decken Sie in n Durchgängen die jeweils oberste Karte der drei Kartenspiele auf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmen in mindestens einem Durchgang die drei gezogenen Karten überein?

b) Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Aufgabe 3) **(2+2 Punkte)**

Seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum und $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ Ereignisse.

a) Beweisen Sie

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(A_k)\,.$$

b) Angenommen, die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ treten jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 nicht ein. Zeigen Sie, dass dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt, höchstens $n \cdot 0.05$ beträgt. Warum ist diese Abschätzung für $n \geq 20$ nutzlos?

Aufgabe 4) **(4 Punkte)**

Es seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse mit $\mathrm{P}(A) = 1/4$, $\mathrm{P}(B^c) = 2/3$, $\mathrm{P}(C) = 1/2$, $\mathrm{P}(A^c \cap B) = 1/4$, $\mathrm{P}(B^c \cup C^c) = 5/6$ und $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cup B \cup C$.

Aufgabe 5) **(2+2 Punkte, L)**

Seien Ω eine nichtleere Menge, I eine beliebige Indexmenge und $A_i \subset \Omega$, $i \in I$. Beweisen Sie die *de Morgan'schen Rechenregeln*:

a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}$

b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}$

Aufgabe 6) **(3+1 Punkte, L)**

Für den 3-maligen Wurf einer Münze definieren wir die Ereignisse

$$A_k : \text{„der } k\text{-te Wurf ist 'Kopf'“}, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

a) Beschreiben Sie die Ereignisse $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2^{\complement} \cap A_3$ und $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

b) Welche Menge entspricht dem Ereignis „beim 3. Wurf wird zum ersten Mal 'Kopf' geworfen“?

Hinweis

Lehramtsstudenten bearbeiten die beiden mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie zwei weitere der vier verbleibenden Aufgaben. Studenten aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben.