**Philipps-Universität Marburg**
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

# Elementare Stochastik (WS 2011/12)

## Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 13.01.12

---

**Aufgabe 53)** **(2+2 Punkte, *)**

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist die *Dreiecksverteilung* definiert durch die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & x \in \big(a, (a+b)/2\big], \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & x \in \big((a+b)/2, b\big), \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Sei $X \sim f_{a,b}$.

a) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable

$$Z = \frac{2}{b-a}\Big(X - \frac{a+b}{2}\Big).$$

b) Berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz von $X$.

**Aufgabe 54)** **(1+1.5+1.5 Punkte)**

Die Zufallsvariable $X$ sei *symmetrisch* verteilt, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $X - x_0$ und $x_0 - X$ diesselbe Verteilung besitzen. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{E}|X| < \infty$, so gilt $\mathrm{E}X = x_0$.

b) $\mathrm{P}(X \leq x_0) \geq 1/2$ und $\mathrm{P}(X < x_0) \leq 1/2$.

c) Ist $X \sim f$ stetig verteilt, so gilt $F_X(x_0) = 1/2$. Ist außerdem $f$ stetig in $x_0$ mit $f(x_0) > 0$, so ist $F$ in einer Umgebung von $x_0$ streng monoton wachsend und deshalb $x_0$ die eindeutige Lösung der Gleichung $F_X(x) = 1/2$.

**Aufgabe 55)** **(2+2 Punkte, *)**

a) Seien $X \sim f$ und $Y \sim g$. Weiter sei $\xi$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$ und unabhängig von $X$ und $Y$. Bestimmen Sie die Dichte von

$$\xi X + (1-\xi)Y.$$

b) Sei nun $X \sim Exp(\lambda)$ und $\zeta$ unabhängig von $X$ mit $\mathrm{P}(\zeta = 1) = \mathrm{P}(\zeta = -1) = 1/2$. Bestimmen Sie die Dichte von $\zeta X$.

**Aufgabe 56)** **(4 Punkte)**

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X$ sowie

$$Y = \sigma X + \mu$$

für $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Zeigen Sie, dass für bel. $p \in (0,1)$ dann gilt

$$Q_p(F_Y) = \sigma Q_p(F_X) + \mu\,.$$

**Aufgabe 57)** **(2+2 Punkte, L)**

Es sei $F_N$ die Verteilungsfunktion der Laplace-Verteilung auf $\left\{\frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{N}{N+1}\right\}$.

a) Skizzieren Sie $F_N$.

b) Zeigen Sie, dass $F_N$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $[0,1]$ konvergiert.

**Aufgabe 58)** **(2+2 Punkte, L)**

Die (zufällige) Laufzeit $X$ einer Wasserpumpe lasse sich gut beschreiben durch die Skalenfamilie $\{f_\lambda\}_{\lambda>0}$ gegeben durch

$$f_\lambda(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,.$$

Weiter sei bekannt, dass jede Pumpe im Mittel 100 Stunden läuft, bis sie ausfällt.

a) Wie ist der Parameter $\lambda$ für eine geeignete Modellierung der Laufzeit zu wählen?

b) Um unerwartete Störungen möglichst zu vermeiden, wird jede Pumpe, die 100 Stunden lang im Einsatz war, vorsorglich ausgetauscht. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Y$, welche dann die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt.

## Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!